

THEORIE

DER

ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

THEORIE

DER

ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

VERSUCH EINER ELEMENTAREN DARSTELLUNG

VON

DR. H. DURÈGE,

DOCENT AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNICUM UND AN DER UNIVERSITÄT ZU ZÜRICH.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1861.


BODLEIANA · BIBLIOTHECA



VORWORT.

Der vorliegende Versuch fand seine Entstehung in dem Wunsche, zur weiteren Verbreitung der Kenntniss der elliptischen Functionen etwas beizutragen. Wir besitzen zwar seit zwei Jahren in dem Buche „*Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques par Briot et Bouquet. Paris*, 1859“ eine vollständige Darstellung der Theorie dieser Functionen; allein, wenngleich die dort ausgeführte, von der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen ausgehende Behandlungsweise unzweifelhaft die richtigste ist, da sie allein eine deutliche Vorstellung von der Natur der elliptischen Functionen, namentlich von dem Wesen der doppelten Periodicität zu gewähren vermag, so möchte sie doch für denjenigen, welcher zum ersten Male an die neuen Functionen herantritt, mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft und daher zum ersten Studium weniger geeignet erscheinen. Hiezu schien vielmehr der historische, von *Abel* und *Jacobi* zuerst betretene Weg, auf welchem die elliptische Function durch die Umkehrung des elliptischen Integrals entsteht, und auf welchem mit den imaginären Grössen, ich möchte sagen, in *Euler*'scher Weise operirt wird, ohne vor der Hand auf die nähere Bedeutung derselben einzugehen, immer noch der passendste zu sein: zumal da die elliptischen Functionen auch mancherlei Anwendungen gestatten, in denen nur reelle Grössen auftreten.

Allerdings bietet sich hier eine Schwierigkeit dar, die besonders von *Eisenstein* in der Abhandlung „Bemerkungen zu den elliptischen und Abel'schen Transcendenten“ (Crelle's Journ. Bd. 27. p. 188) hervorgehoben worden ist, nämlich die, dass das elliptische Integral eine vieldeutige Function der oberen Grenze sein muss, wenn die Umkehrung eine periodische Function sein soll; und diese Schwierigkeit lässt sich kaum anders, als durch Betrachtung complexer Variabeln beseitigen. Deshalb wurde der Ausweg ergriffen, die Theorie zuerst in der angedeuteten Weise zu behandeln, am Schlusse aber einen Abschnitt über Functionen einer complexen Veränderlichen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale hinzuzufügen.

Es schien zweckmässig und das Verständniss fördernd, gleich im Anfange die Anwendbarkeit der elliptischen Functionen an einem Beispiele zu zeigen; dazu wurde die Bewegung des ebenen Pendels gewählt. Der Anwendungen wegen durfte auch die Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform nicht fehlen, da dieselben wohl nur in den seltensten Fällen sich in der zur weiteren Behandlung nothwendigen einfachsten Gestalt darbieten werden. Ferner schien es wünschenswerth, die geometrischen Anwendungen *Lagrange's* und *Jacobi's* im Zusammenhange darzustellen.

In einigen Theilen, unter denen der IVte Abschnitt, §. 32 des VIII. Abschnitts, namentlich aber die im XIII. und XIV. Abschnitte gegebenen Methoden der Zerfällung der Function Sinus Amplitudo in Factoren und der Entwickelung der Reihen aus den unendlichen Producten besonders hervorzuheben sind, haben mir die Vorlesungen meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor *Richelot* in Königsberg, zur Richtschnur gedient. Der Abschnitt VI wurde hauptsächlich wegen seiner Wichtigkeit für die Auffindung der in den verschiedenen Fällen nothwendigen Substitutionsformeln mit aufgenommen, wenngleich zugestanden werden muss, dass manche der darin enthaltenen Betrach-

tungen erst unter vollständiger Berücksichtigung complexer Variabeln ganz in Ordnung gebracht werden können. Vom XIV. Abschnitte an bin ich den „Fundamenten" *Jacobi's* gefolgt, in der Absicht, das Verständniss derselben zu erleichtern. Das Problem der allgemeinen Transformation, sowie der Multiplication und Division der elliptischen Functionen wurde ganz von der Behandlung ausgeschlossen, einmal, weil dasselbe zum ersten Studium nicht unbedingt nothwendig erschien, dann aber, weil dieser Abschnitt gerade zweckmässiger behandelt werden kann, wenn man von der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen ausgeht. Der Abschnitt XX enthält die Ausführung eines grösseren Beispiels für die Anwendung der elliptischen Functionen und bildet einen Theil einer im Jahre 1849 vollendeten, aber ungedruckt gebliebenen Arbeit über das sphärische Pendel. Die Mittheilung desselben erschien auch deswegen zweckmässig, weil darin einiges enthalten ist, was in der weiter gehenden Abhandlung von *Dumas* „Ueber die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde" (Crelle's Journ. Bd. 50.) vorausgesetzt wird. Der letzte Abschnitt hat zum Zwecke, die im Eingange erwähnte Schwierigkeit zu heben, indem versucht wurde, die Elemente der Theorie der Functionen einer complexen Variabeln wenigstens insoweit darzustellen, als zum Nachweise der Vieldeutigkeit bestimmter Integrale erforderlich war. Damit wurde zugleich die Absicht verbunden, den Leser auf den Standpunkt hinzuführen, aus welchem die Theorie der elliptischen Functionen in der erwähnten Schrift von *Briot* und *Bouquet* behandelt worden ist, und aus welchem in Zukunft, wenn alle Schwierigkeiten geebnet, alle Dunkelheiten aufgehellt sein werden, die Theorie der Functionen überhaupt allem Vermuthen nach schon in den Elementen behandelt werden wird.

Ich habe mich bemüht, die Quellen so vollständig, als es mir möglich war, anzugeben. Dies war im letzten Abschnitte mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, und ob-

gleich ich viele Mühe darauf verwandt habe, zweifle ich bei der grossen Anzahl der zerstreuten Abhandlungen *Cauchy's*, bei den vielfältigen darin vorkommenden Wiederholungen und der Mangelhaftigkeit der in ihnen enthaltenen Nachweisungen, ob es mir gelungen sein wird, überall die ersten und maassgebenden Arbeiten aufzufinden. In dieser Beziehung, wie überhaupt, sei dieser Versuch der Nachsicht der Kenner empfohlen.

Zürich, im September 1861.

H. Durège.

Inhalt.

Abschnitt I.

Begriff der elliptischen Functionen.

Abschnitt II.

Von der Periodicität der elliptischen Functionen.

Abschnitt III.

Von der Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

Abschnitt IV.

Von den drei Gattungen elliptischer Integrale.

Abschnitt V.

Rectification der Ellipse und Hyperbel.

Abschnitt VI.

Ueber eine Substitution der zweiten Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

Abschnitt VII.

Das Additionstheorem.

Abschnitt VIII.

Ueber den Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie.

Abschnitt IX.

Das Additionstheorem für die zweite und dritte Gattung.

Abschnitt X.

Integration der elliptischen Differentialgleichung in algebraischer Form.

Abschnitt XI.

Jacobi's geometrische Construction des Additionstheoremes.

Abschnitt XII.

Die Landen'sche Transformation.

Abschnitt XIII.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen.

Abschnitt XIV.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen.

Abschnitt XV.

Reihenentwickelung für die zweite Gattung.

Abschnitt XVI.

Reihenentwickelung für die dritte Gattung.

Abschnitt XVII.

Die Jacobi'sche Function.

Abschnitt XVIII.

Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function.

Abschnitt XIX.

Ueber die elliptischen Transcendenten der dritten Gattung.

Anhang.

Abschnitt XX.

Ueber die Bewegung des sphärischen Pendels.

Abschnitt XXI.

Ueber Functionen einer complexen Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale.

Erster Abschnitt.

Begriff der elliptischen Functionen.

---

§ 1.

Die **elliptischen Functionen** sind eine Gattung von Functionen, welche sich den Exponential- und trigonometrischen Functionen aufs innigste anschliessen, und zwar so, dass die letzteren beiden Gattungen als specielle Fälle in jenen enthalten sind.

Die trigonometrischen und Exponentialfunctionen besitzen in vieler Beziehung Vorzüge vor ihren Umkehrungen, den cyclometrischen Functionen und Logarithmen. Es ist bekannt, mit welcher Geschmeidigkeit sich die Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. in die mannigfaltigsten Beziehungen zu einander bringen lassen, und wie dadurch diese Functionen besonders geschickt sind, analytischen Ausdrücken eine zur numerischen Berechnung bequeme Gestalt zu geben. Die Exponentialfunctionen erfreuen sich einer eben solchen Geschmeidigkeit, da sie ja in der That nichts anderes, als trigonometrische Functionen von imaginären Variabeln sind; doch ist es dann nicht sowohl die einfache Exponentialfunction e^x, als vielmehr solche Combinationen wie

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

welche den trigonometrischen Functionen an die Seite zu stellen sind.

Ausser diesen allgemeinen Vorzügen besitzen die genannten Functionen noch einige besondere Eigenschaften, durch die sie sich vor ihren Umkehrungen auszeichnen:

1. Die unendlichen Reihen, in welche sie sich entwickeln lassen, convergiren für jeden beliebigen Werth der Variabeln.

Es gilt dies freilich bei den trigonometrischen Functionen nur vom Sinus und Cosinus, jedoch hat man diese wohl als die Hauptrepräsentanten der trigonometrischen Functionen anzusehen. Ja, da Sinus und Cosinus für imaginäre Argumente in Exponentialfunctionen übergehen und umgekehrt, so convergiren diese Reihen nicht blos für alle reellen, sondern auch für alle imaginären Werthe der Variabeln.

2) Sie lassen sich in Factorenfolgen entwickeln, sowohl von einer endlichen als auch unendlichen Anzahl von Factoren.

3) Die Function der Summe zweier Variabeln lässt sich durch die Functionen der einzelnen Variabeln auf einfache Weise **algebraisch** ausdrücken. So ist z. B.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$e^{(x+y)} = e^x e^y.$$

4) Sie sind **periodische** Functionen; und zwar ist der **Index** der Periode, d. h. die Grösse, um welche man das Argument der Function vermehren oder vermindern kann, ohne dass der Werth der Function sich verändert, bei den trigonometrischen Functionen reell, nämlich 2π, bei den Exponentialfunctionen dagegen imaginär, nämlich $2\pi i$ *).

5) Die Differentialquotienten der trigonometrischen und Exponentialfunctionen sind wieder Functionen derselben Art, z. B.

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Die Differentialquotienten der Logarithmen und cyclometrischen Functionen sind **algebraische** Functionen, z. B.

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Daraus folgt, dass die Logarithmen und cyclometrischen Functionen sich als **Integrale algebraischer** Functionen darstellen lassen, z. B.

$$1) \int_1^x \frac{dx}{x} = \log x; \qquad 2) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2});$$

*) Wenn keine besondere Bedeutung angegeben wird, so soll stets, wie üblich, unter π die Ludolphische Zahl, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen und unter i die $\sqrt{-1}$ verstanden werden.

$$3)\ \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}; \qquad 4)\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x;$$

$$5)\ \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x;$$

wobei die unteren Grenzen jedesmal so gewählt worden sind, dass die willkürliche Constante verschwindet.

Wir wollen zunächst diese letzte sehr wichtige Eigenschaft einer näheren Betrachtung unterwerfen. Sieht man in den vorstehenden Integralen die obere Grenze als veränderlich an, so kann man sagen, dass die Logarithmen und cyclometrischen Functionen algebraische Integrale sind, diese Integrale als Functionen ihrer oberen Grenze betrachtet. Nun sind die trigonometrischen und Exponentialfunctionen die Umkehrungen jener; während also die letzteren sich als Integrale darstellen lassen, bilden die ersteren die veränderlichen oberen Grenzen dieser Integrale; oder mit anderen Worten: Betrachtet man in gewissen algebraischen Integralen das Integral als Function der oberen Grenze, so ist diese Function ein Logarithmus oder eine cyclometrische Function; betrachtet man aber umgekehrt bei denselben Integralen die obere Grenze als Function des Integrals, so ist eine solche Function eine Exponential- oder eine trigonometrische Function. Setzen wir in den obigen Beispielen nach der Reihe

$$1)\ \int_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad 2)\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = u, \quad 3)\ \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = u;$$

$$4)\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad 5)\ \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = u$$

und betrachten jedesmal u als Function von x, so ist nach der Reihe

$$1)\ u = \log x, \quad 2)\ u = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$3)\ u = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad 4)\ u = \text{arc}\sin x, \quad 5)\ u = \text{arc tg}\, x.$$

Betrachtet man aber umgekehrt jedesmal x als Function von u, so ergiebt sich leicht nach der Reihe

$$1)\ x = e^u, \quad 2)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad 3)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$
$$4)\ x = \sin u, \quad 5)\ x = \operatorname{tg} u.$$

Diese Betrachtungsweise ist wesentlich keine andere, als diejenige, welche z. B. bei der Einführung der Logarithmen in der elementaren Mathematik gemacht wird.*)

§ 2.

Die zuletzt angestellte Betrachtung wandte Abel auf ein zusammengesetzteres algebraisches Integral an, nämlich auf das folgende:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$

in welchem k eine positive Constante, die kleiner als 1 ist, bedeutet.**) Der wesentliche Unterschied dieses Integrals von den im vorigen § betrachteten ist der, dass es ein irrationales Integral, und die Grösse unter dem Wurzelzeichen vom 4ten Grade ist,

---

*) Dabei entsteht allerdings eine Schwierigkeit, die hier nicht unerwähnt bleiben mag. Da nämlich die oben erwähnten Functionen von u periodische Functionen sind, sodass einem und demselben Werthe von x mehrere verschiedene Werthe von u angehören, so müssen die obigen Integrale, welche Functionen von x sind, vieldeutige Functionen sein. Nach der gewöhnlichen Definition eines bestimmten Integrals aber sieht man nicht ein, wie ein solches vieldeutig sein könne. Ueber die Hebung dieser Schwierigkeit und den Nachweis, dass bestimmte Integrale in der That vieldeutig sein können, verweisen wir auf den im Anhange behandelten Abschnitt XXI.

**) Abel ging in seiner ersten Abhandlung über die elliptischen Functionen „Recherches sur les fonctions elliptiques" Crelle's Journ. Bd. 2 und Oeuvres complètes de N. H. Abel Tome I. No. XII. allerdings von einer etwas anderen Form aus, nämlich von dem Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Die im Text angegebene Form wurde von Legendre als Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung aufgestellt. Jacobi ging wieder auf dieselbe zurück, und sie wurde später auch von Abel als Ausgangspunct adoptirt.

während jene Integrale entweder rational sind, oder unter dem Wurzelzeichen eine Function des zweiten Grades haben.

Dieses Integral hatte die Mathematiker vor Abel schon vielfach beschäftigt. Gleich nach der Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch Leibnitz und Newton entstand die Aufgabe, die Integrale der verschiedenen Functionen, namentlich der algebraischen Functionen, so viel als möglich auf schon bekannte Functionen zurückzuführen. Dies gelang auch mit allen rationalen algebraischen Functionen und mit denjenigen irrationalen Functionen, welche nur eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck des zweiten Grades enthalten. Die Reduction dieser Integrale wurde theils von Leibnitz selbst, theils von Jacob und Johann Bernoulli ausgeführt und durch Euler zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Allein bei denjenigen Integralen, die die Quadratwurzel aus einem Ausdruck enthalten, der den zweiten Grad übersteigt, gelang die Reduction auf schon bekannte Functionen nicht. Anfangs glaubte man zwar dies der Unvollkommenheit der Methoden zuschreiben zu müssen, bald aber erkannte man, dass man es in der That mit ganz neuen Functionen zu thun habe. Mit denjenigen unter diesen Integralen, deren Radical den 4ten Grad nicht übersteigt, beschäftigte sich nun zunächst Euler, dann aber vorzüglich Legendre, der diesen Integralen den Namen elliptische Functionen gab, weil die Rectification der Ellipse auf ein Integral dieser Art führt. Jetzt nennt man nach Jacobi diese Integrale elliptische Integrale zum Unterschiede von den eigentlichen elliptischen Functionen, von denen sogleich die Rede sein soll. Legendre legte seine Untersuchungen in den zwei grossen Werken „*Exercices du calcul intégral*“ und „*Traité des fonctions elliptiques*“ nieder und zeigte darin unter anderem, dass sich alle elliptischen Integrale auf drei verschiedene Formen zurückführen lassen, welchen er die Namen, Elliptisches Integral der ersten, zweiten und dritten Gattung gab.

Das oben erwähnte Integral

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ist nun das elliptische Integral der ersten Gattung, und zwar nennt man diese Form desselben die Normalform. Von dem-

selben ist sogleich ersichtlich, dass es sich für die beiden speciellen Werthe o und 1 der Constanten k auf einen Arcus Sinus und einen Logarithmus reducirt; denn man hat

$$\text{für } k = o,\ u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arc \sin x$$

$$\text{für } k = 1,\ u = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Die elliptischen Integrale sind also Functionen der Art, dass sie die cyclometrischen Functionen und Logarithmen als specielle Fälle umfassen; sie sind daher den zuletzt genannten Functionen anzureihen.

Nun erkannte aber Abel, dass nicht sowohl die Integrale, welche die cyclometrischen Functionen und Logarithmen darstellen, sondern vielmehr ihre Umkehrungen, nämlich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen, für die gesammte Analysis die bei weitem wichtigeren Functionen sind, und schloss daraus, dass die Umkehrung des elliptischen Integrals eine Gattung von Functionen liefern würde, wichtiger als die elliptischen Integrale selbst. In der That mussten diese umgekehrten Functionen nun die trigonometrischen und Exponentialfunctionen als specielle Fälle umfassen und daher von noch grösserer Bedeutung sein als diese.

Diese umgekehrten Functionen, die also entstehen, wenn man in dem elliptischen Integral (1) die obere Grenze x als Function des Integrals u betrachtet, sind es nun, die man elliptische Functionen nennt.

§ 3.

Legendre hatte schon gezeigt, und wir kommen darauf ausführlich zurück, dass man immer bewirken kann, dass die obere Grenze des Integrals (1) das Intervall der Werthe zwischen -1 und $+1$ nicht überschreitet. Unter dieser Voraussetzung kann man die Variable x einem Sinus gleich setzen und erhält dann, wenn man

$$x = \sin \varphi$$

setzt,

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Hierin hatte Legendre den Bogen φ, nämlich die obere Grenze des Integrals, die Amplitude, und die Constante k den Modul des Integrals genannt, und um das Integral kurz zu bezeichnen, hatte er das Zeichen F gewählt und gesetzt:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, k) = F(\varphi),$$

wo die letztere kürzere Bezeichnung angewendet wird, wenn der Modul k nicht zweifelhaft ist.

Die Umkehrung der elliptischen Integrale oder die Einführung der eigentlichen elliptischen Functionen besteht nun darin, dass man x oder φ als Function von u ansieht. Um diese Functionen zu bezeichnen, behielt Jacobi (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* § 17) das von Legendre gewählte Wort Amplitude bei und setzte

$$\varphi = am\, u$$

gesprochen: φ gleich Amplitudo u. Ebenso wie das Integral u, als Function von φ angesehen, noch von dem Modul k abhängig ist, ebenso ist auch φ, als Function von u betrachtet, von k abhängig. Wenn es nothwendig ist, den Werth des Moduls anzudeuten, schreibt man entweder

$$\varphi = am\,(u, k)$$

oder fügt den Modul in Klammern hinzu, in folgender Art:

$$\varphi = am\, u \;(\text{mod. } k).$$

Betrachtet man nun in dem algebraischen Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

x als Function von u, so ist, weil $x = \sin\varphi$ gesetzt war,

$$x = \sin am\, u$$

(x gleich Sinus Amplitudo u), und die trigonometrischen Functionen von $am\, u$ sind es nun, die man elliptische Functionen von u nennt. Die Variable u nennt Jacobi das Argument der elliptischen Function.

Für den Nenner $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ des Integrals $F(\varphi)$ hatte Legendre ein besonderes Zeichen eingeführt, nämlich gesetzt:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \varDelta(\varphi, k) = \varDelta\varphi.$$

Diese Function, die in der Theorie der elliptischen Functionen immer wieder vorkommt, ist gleichsam als eine neue trigonometrische Function zu betrachten, die dem Cosinus verwandt, allerdings aber auch noch vom Modul k abhängig ist. Führt man aber statt φ das Argument u ein, so werden $\sin am\, u$, und $\cos am\, u$ ebenfalls von k abhängig. Es sind daher

$$\sin am\, u, \ \cos am\, u, \ \varDelta\, am\, u$$

die drei hauptsächlichsten einfachen elliptischen Functionen, aus denen sich die vier übrigen

$$\operatorname{tg} am\, u, \ \operatorname{cotg} am\, u, \ \sec am\, u, \ \operatorname{cosec} am\, u$$

durch blosse Division ergeben.*)

Neben dem Modul k hat Legendre noch einen andern eingeführt, den Jacobi stets mit k' bezeichnet, und der mit k in der Beziehung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

steht. Da diese beiden sich zu einander verhalten, wie Sinus und Cosinus, so nennt man nach Legendre jeden das Complement des andern, oder auch den einen den Modul, den andern den complementären Modul.

Die Function $\varDelta$ wird für reelle Werthe von φ stets positiv genommen. Vergleicht man sie mit dem Cosinus, so erhellt zunächst, da

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}, \quad \varDelta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

ist, dass für $\varphi = o$ beide gleich 1 werden. Wächst dann φ, so bleibt, weil k^2 ein echter Bruch ist,

$$\varDelta\varphi > \cos\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\cos\frac{\pi}{2} = o$, dagegen $\varDelta\frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - k^2} = k'$.

---

*) Statt der Bezeichnungen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\varDelta\, am\, u$ hat Gudermann in seiner „Theorie der Modularfunctionen" (Crelle's Journ. Bd. 18.) § 6 die kürzeren

$$snu, \ cnu, \ dnu$$

vorgeschlagen, welche man ebenfalls angewendet findet.

Dies ist also der kleinste Werth, den $\Delta\varphi$ annehmen kann, denn wächst nun φ über $\frac{\pi}{2}$ hinaus, so wird $\Delta\varphi$ wieder positiv und grösser als k'. Hieraus folgt, dass die Function Δ für reelle Werthe von φ niemals verschwindet. Während also der Cosinus durch die Curve $ABCDE$ (Fig. 1) geometrisch dargestellt wird, giebt die Curve $AB'C'D'E$ ein Bild der Function Δ, wenn $BB' = DD' = k'$ gemacht wird.

Fig. 1.

Bemerkenswerth sind noch die sich von selbst ergebenden Relationen

$$\Delta^2\varphi + k^2\sin^2\varphi = 1, \quad \Delta^2\varphi - k^2\cos^2\varphi = k'^2,$$

welche gewissermassen der Relation

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

analog sind.

§ 4.

Es wurde schon § 2 erwähnt, dass die elliptischen Functionen für die Werthe o und 1 des Moduls k in trigonometrische oder Exponentialfunctionen übergehen. Dies ist nun leicht einzusehen. Denn für $k = o$ hat man

$$u = \int_0^\varphi d\varphi = \varphi; \text{ also } \varphi = am\,(u, o) = u, \text{ mithin}$$

$$\sin am\,(u, o) = \sin u$$

Für $k = 1$ aber ist

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} \text{ und dann } x = \sin am\,(u, 1).$$

Wir fanden § 1. für diesen Fall

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

also ist

$$\sin am\,(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

Das Integral und seine Amplitude verschwinden für jeden Werth von k gleichzeitig; daher ist

$$am\,(o, k) = o$$

$$\sin am\,(o, k) = o, \;\; \cos am\,(o, k) = 1, \;\; \Delta\, am\,(o, k) = 1.$$

Nimmt ferner die Amplitude denselben Werth mit entgegengesetztem Zeichen an, so thut dies auch das Integral, also ist

$$am\,(-u) = -\,am\, u.$$

Die Function $am\, u$ ist daher eine ungerade Function, und es ist

$$\sin am\,(-u) = -\sin am\, u, \;\; \cos am\,(-u) = \cos am\, u$$

$$\Delta\, am\,(-u) = \Delta\, am\, u.$$

Aus den Betrachtungen des § 1 geht hervor, dass die Differentialquotienten der elliptischen Functionen wieder elliptische Functionen sein werden. Diese sind jetzt leicht zu ermitteln. Zunächst folgt aus

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi; \quad \text{also} \quad \frac{d\, am\, u}{du} = \Delta\, am\, u.$$

Dies zeigt, dass $am\, u$ für reelle Werthe von u eine stets wachsende Function ist. Ferner hat man

$$\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi, \;\; \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi,$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} = -\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

folglich ist

$$(2) \;\ldots\; \begin{cases} \dfrac{d \sin am\, u}{du} = \cos am\, u\, \Delta\, am\, u \\[2ex] \dfrac{d \cos am\, u}{du} = -\sin am\, u\, \Delta\, am\, u \\[2ex] \dfrac{d\, \Delta\, am\, u}{du} = -k^2 \sin am\, u \cos am\, u. \end{cases}$$

§ 5.

Um die Anwendbarkeit der elliptischen Functionen an einem Beispiele darzuthun, wollen wir die Bewegung des ebenen Pendels untersuchen und zeigen, dass die Function Sinus Amplitudo diejenige Function ist, mittelst welcher die Ablenkung eines hin- und herschwingenden Pendels durch die Zeit ausgedrückt wird.

Wir betrachten hier nur das mathematische Pendel, d. h. wir untersuchen die Bewegung eines materiellen Punctes, auf den die Schwere wirkt, und der gezwungen ist, sich in einem Kreise zu bewegen.

Bezeichnet g die Acceleration der Schwere, l die Länge des Pendels, ψ den Winkel, den dasselbe mit der Verticallinie bildet, und t die Zeit, so ist bekanntlich die Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels folgende:

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\psi,$$

wobei die Masse des materiellen Punctes gleich Eins angenommen ist, und diejenige Kraft als positiv angesehen wird, die den Winkel ψ zu vergrössern strebt. Man kann bekanntlich ohne Hülfe der elliptischen Functionen hieraus die Relation zwischen ψ und t, welche die Bewegung des Pendels darstellt, nur dann ermitteln, wenn man die Ablenkung ψ so klein annimmt, dass man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann. Wir nehmen dies nun nicht an, sondern setzen über die Grösse von ψ nichts voraus.

Man kann die Gleichung (3) einmal integriren, wenn man sie mit $2\frac{d\psi}{dt}$ multiplicirt; dann erhält man durch Integration

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\psi + C$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Um die mechanische Bedeutung derselben einzusehen, bemerke man, dass derjenige Werth von ψ, für welchen $\frac{d\psi}{dt}$ verschwindet, ein Maximum- oder Minimumwerth des Winkels ψ ist. Bezeichnet man diesen Werth mit α, so hat man die Gleichung

$$o = \frac{2g}{l}\cos\alpha + C,$$

aus welcher

$$C = -\frac{2g}{l}\cos\alpha, \quad \cos\alpha = -C\frac{l}{2g}$$

folgt.

Da aber α nur durch den Cosinus gegeben ist, so kann man diesen Winkel ebenso wohl negativ als positiv annehmen. Da alsdann die Gleichung (3) zeigt, dass der Werth des zweiten Differentialquotienten für ein positives α negativ und für ein negatives α positiv wird, so sieht man ein, dass $+\alpha$ der grösste

und $-\alpha$ der kleinste Werth des Winkels ψ ist. Hieraus folgt, dass das Pendel zwischen den beiden Werthen $+\alpha$ und $-\alpha$ des Winkels ψ hin- und herschwingt. Allein hiebei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die willkürliche Constante C einen solchen Werth besitze, dass $\cos\alpha$ nicht kleiner als -1 und nicht grösser als $+1$ ausfalle. Es ist nun klar, dass diese Bedingung nicht immer erfüllt sein wird. Wenn sie es aber nicht ist, dann gehört dem Cosinus kein reeller Winkel α mehr an, es existirt dann kein Maximum- oder Minimumwerth des Winkels ψ, und derselbe wird, anstatt abwechselnd zu- und abzunehmen, entweder beständig zu- oder beständig abnehmen. Statt eines hin- und herschwingenden Pendels haben wir alsdann ein solches, das um die ganze Peripherie herumschwingt.

Um nun noch näher zu untersuchen, wann dies eintritt, wollen wir die Constante C durch die Anfangswerthe ausdrücken, d. h. durch diejenigen Werthe der Variabeln ψ und ihres Differentialquotienten $\frac{d\psi}{dt}$ (der Winkelgeschwindigkeit), welche irgend einem bestimmten Werthe von t angehören. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die Zeit von dem Augenblicke an gezählt werde, in welchem das Pendel durch die Verticallinie geht, und dass in diesem Augenblicke die Winkelgeschwindigkeit den Werth v besitze; dann sind

$$\psi = o \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{dt} = v$$

die Anfangswerthe, welche dem Werthe $t = o$ zugehören. Setzt man diese in die Gleichung (4), so erhält man

$$v^2 = \frac{2g}{l} + C$$

also

$$C = v^2 - \frac{2g}{l} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = 1 - \frac{lv^2}{2g}.$$

Hieraus erhellt, da g, l, v^2 positive Grössen sind, dass $\cos\alpha$ zwar niemals grösser als $+1$ ist, wohl aber kleiner als -1 werden kann, nämlich dann, wenn

$$lv^2 > 4g$$

ist. Nun ist lv^2 der Ausdruck für die Centrifugalkraft in dem Augenblicke, wann das Pendel durch die Verticallinie hindurchgeht. Da ausserdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist, je nachdem

$lv^2 <$ oder $> 2g$, so erhält man für die Art, wie ein ebenes Pendel schwingt, folgendes Resultat:

Wenn die Centrifugalkraft eines ebenen Pendels in dem Augenblicke, da dieses durch die Verticale hindurchgeht, kleiner als die doppelte Schwere ist, so schwingt das Pendel in dem unteren Halbkreise hin und her. Ist die Centrifugalkraft grösser als die doppelte Schwere, so steigt das Pendel in den oberen Halbkreis und schwingt noch hin und her, wenn die Centrifugalkraft zugleich kleiner als die vierfache Schwere ist; ist sie aber grösser als die vierfache Schwere, so läuft das Pendel um die ganze Peripherie herum.

§ 6.

Wir werden uns nun zunächst nur mit dem hin- und herschwingenden Pendel beschäftigen, indem wir das ganz herumschwingende einer späteren Betrachtung vorbehalten.*)

Ersetzt man in der Gleichung (4) die Constante C durch den Winkel α, so erhält man

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\psi - \cos\alpha)$$

woraus

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}},$$

und, wenn man wie oben annimmt, dass ψ und t gleichzeitig verschwinden,

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}}$$

folgt. Dieses Integral ist nun ein elliptisches, denn setzt man $\cos\psi = x$, wodurch

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\cos\alpha)}}$$

wird, so sieht man, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen vom dritten Grade ist. Um nun dieses elliptische Integral auf die Normalform zu bringen, hat man nur nöthig, statt der Variabeln ψ eine andere Variable φ mittelst der Substitution

*) Siehe § 15.

(6) . . . . $\sin \frac{1}{2} \psi = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi$

einzuführen. Denn dadurch erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2} \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi}; \; d\psi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi}}$$

$$\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha} = \sqrt{2} \sin \tfrac{1}{2} \alpha \cos \varphi$$

mithin:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

Hiedurch ist die Normalform hergestellt, und der Modul des Integrals ist $\sin \frac{1}{2} \alpha$. Setzt man also

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = k,$$

so erhält man, da die Winkel ψ und φ wegen (6) gleichzeitig verschwinden, aus (5)

(7) . . . . . $$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Da nun hienach der Werth des Integrals sich gleich $t \sqrt{\frac{g}{l}}$ ergeben hat, so ist φ die Amplitude dieses Ausdruckes. Also ist

$$\varphi = am\, t \sqrt{\frac{g}{l}};$$

substituirt man dies in (6), so folgt

(8) . . . . . . $$\sin \tfrac{1}{2} \psi = k \sin am\, t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

wodurch ψ als Function der Zeit ausgedrückt ist. Es folgt daraus noch

$$\cos \tfrac{1}{2} \psi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}} = \Delta\, am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

also

(9) . . . . . $$\sin \psi = 2 k \sin am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}\; \Delta\, am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\cos \psi = 1 - 2 k^2 \sin^2 am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

und die Winkelgeschwindigkeit wegen der Formeln (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = 2 k \sqrt{\frac{g}{l}} \cos am\, t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Wir werden im Verlauf unserer Untersuchungen sehen, dass die elliptischen Functionen sich in sehr stark convergirende Reihen entwickeln lassen. Mittelst derselben kann man sie alsdann für jeden gegebenen Werth des Moduls und des Arguments berechnen. Kann man aber die Werthe von Sinus Amplitudo u. s. w. aus den gegebenen Daten finden, so leuchtet ein, dass die strenge Auflösung der Pendelaufgabe gerade so einfach ist, wie die genäherte Auflösung, bei welcher die Ablenkung durch den Sinus ausgedrückt wird. Einen Vorzug für die numerische Rechnung haben allerdings die trigonometrischen Functionen, nämlich den, dass sie in ausserordentlich bequeme Tafeln gebracht sind, aus denen man ihre Werthe mit grosser Leichtigkeit entnehmen kann. Tafeln von so bequemer Einrichtung lassen sich nun wohl für die elliptischen Functionen kaum aufstellen, weil die letzteren von zwei Grössen abhängig sind, dem Argument und dem Modul; dagegen sind die Reihen für die elliptischen Functionen, besonders, wenn man die sogenannte Θ-Function zu Hülfe nimmt (worüber das Nähere in § 65), so ausserordentlich convergent, dass dieselben in vielen Fällen einfachen geschlossenen Ausdrücken gleich gesetzt werden können.

Ein besonderer Vorzug, den die elliptischen Functionen gegenüber den elliptischen Integralen besitzen, darf hier nicht unerwähnt bleiben. Gewöhnlich ergiebt sich bei mechanischen Aufgaben schliesslich die Zeit ausgedrückt durch ein Integral, das die Coordinaten, von welchen der Ort des beweglichen Punctes abhängt, enthält. Dies ist aber nicht eigentlich das, was man wissen will; man wünscht vielmehr gerade umgekehrt die Coordinaten durch die Zeit ausgedrückt zu haben. Das vorliegende Beispiel zeigt, wie die elliptischen Functionen diese Forderung erfüllen, während die elliptischen Integrale nur die Zeit durch die Coordinaten ausdrücken.

Zweiter Abschnitt.

Von der Periodicität der elliptischen Functionen.

---

§ 7.

Wir haben gesehen, dass die elliptischen Functionen die trigonometrischen und Exponentialfunctionen als specielle Fälle in sich schliessen. Daraus kann man schon im voraus abnehmen, dass die in § 1 erwähnten Eigenschaften, durch welche sich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen auszeichnen, den elliptischen Functionen ebenfalls zukommen. Wir werden dies nach und nach vollständig nachzuweisen suchen. Für jetzt aber wollen wir uns nur mit einer Eigenschaft beschäftigen, nämlich mit der Periodicität. Die elliptischen Functionen sind hierin besonders merkwürdig, da sie eine doppelte Periode besitzen, eine reelle, wie die trigonometrischen Functionen und eine imaginäre, wie die Exponentialfunctionen.

Unter den verschiedenen Werthen, welche die obere Grenze eines elliptischen Integrals annehmen kann, ist der Werth $\frac{\pi}{2}$ besonders ausgezeichnet. Es soll sogleich nachgewiesen werden, dass man jedes elliptische Integral mit beliebiger Amplitude zurückführen kann auf ein Integral mit der Amplitude $\frac{\pi}{2}$ und eines, dessen Amplitude kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Aus diesem Grunde hat Legendre das elliptische Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

la fonction complète genannt. Wir wollen es das vollständige Integral nennen und nach Jacobi mit K bezeichnen, sodass

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

ist. Legendre hatte dafür das Zeichen F^1 angewandt. Diese Grösse hängt, wie man sieht, nur noch von dem Modul k ab, und wir werden später Mittel finden,*) sie mit Leichtigkeit für jeden Werth von k zu berechnen. Denjenigen Werth von K, welcher dem complementären Modul k' zugehört, hat Jacobi analog mit K' bezeichnet, sodass

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist.

Was die Beschaffenheit von K anbetrifft, so ist zuerst klar, dass für $k = o$, $K = \frac{\pi}{2}$ wird. Ferner ist K immer positiv, denn da sich das bestimmte Integral als der Grenzwerth einer Summe ansehen lässt, und $\Delta\varphi$ in der ganzen Ausdehnung des Integrals positiv ist und niemals verschwindet, so ist K der Grenzwerth einer Summe von lauter positiven Grössen, mithin selbst positiv. Aus demselben Grunde ist auch

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

immer positiv. Daher ist K für alle von o verschiedenen Werthe von k grösser als $\frac{\pi}{2}$ und wird zuletzt für $k = 1$ unendlich gross. Das letzte geht aus der algebraischen Form des Integrals hervor, denn, da man auch hat, $\sin\varphi = x$ gesetzt,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

so erhält man für $k = 1$

$$K = \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}\right]_{x = 1} = \frac{1}{2} \log \frac{2}{o} = \infty.$$

Aus der Definition von K folgt nun, dass $\frac{\pi}{2}$ die Amplitude von K ist, wenn der Modul k, und die Amplitude von K', wenn der Modul k' ist; also hat man

---

*) Vgl. Abschnitt XII.

$$am\,(K, k) = am\,(K', k') = \frac{\pi}{2}$$

und dann sogleich

$$\sin am\, K = 1,\ \cos am\, K = o,\ \varDelta\, am\, K = k'.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass diese Grösse K bei den elliptischen Functionen dieselbe Rolle spielt, wie die Zahl $\frac{\pi}{2}$ in der Trigonometrie; in der That wird auch für den Fall, dass die elliptischen Functionen in trigonometrische übergehen, nämlich wenn $k = o$ ist, $K = \frac{\pi}{2}$.

Es soll nun folgender Satz bewiesen werden: Nimmt man das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

nach und nach zwischen den Grenzen

$$o \ldots \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \ldots \pi,\ \pi \ldots \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \ldots 2\pi,\ \text{etc.}$$

$$-\frac{\pi}{2} \ldots o,\ -\pi \ldots -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2} \ldots -\pi,\ -2\pi \ldots -\frac{3\pi}{2}\ \text{etc.},$$

so sind alle diese Integrale einander gleich und gleich K. Um dies einzusehen, bezeichne n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, dann ist jedes der vorliegenden Integrale von einer der beiden Formen

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \quad \text{oder} \quad \int_{n\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Setzt man aber in dem ersteren Integrale

$$\varphi_1 = n\pi - \varphi,$$

so erhält man

$$\int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\varDelta\varphi_1} = K,$$

und setzt man in dem zweiten Integral

$$\varphi_1 = \varphi - n\pi,$$

so erhält man

$$\int_{\nu\pi}^{\frac{2\nu+1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = K.$$

Ein elliptisches Integral, dessen Grenzen zwei auf einander folgende Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind, hat also stets den Werth K. Bildet man daher nun ein elliptisches Integral, dessen untere Grenze Null, und dessen obere Grenze ein beliebiges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Werth desselben ein Vielfaches von K. Denn es ist:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \ldots\ldots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = nK.$$

Nun ist $n\frac{\pi}{2}$ die Amplitude des Integrals, dessen Werth nK ist, mithin hat man

$$n \,.\, \frac{\pi}{2} = am\,(nK),$$

oder weil $\frac{\pi}{2} = am\,K$ ist,

$$am\,(n\,K) = n \,.\, am\,K.$$

Es ist also der Reihe nach:

$$\frac{\pi}{2} = am\,K$$
$$\pi = am\,2K = 2 \,.\, am\,K$$
$$\frac{3\pi}{2} = am\,3K = 3 \,.\, am\,K$$
$$2\pi = am\,4K = 4 \,.\, am\,K$$

u. s. w.

Betrachten wir jetzt ein elliptisches Integral mit der beliebigen Amplitude α, so kann man, wenn β einen Bogen zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, entweder

$$\alpha = n\pi + \beta \quad \text{oder} \quad \alpha = n\pi - \beta$$

setzen, je nachdem das grösste in α enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist

$$\int_0^{\nu\pi+\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{\nu\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\int_{\nu\pi}^{\nu\pi+\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

oder, wenn man

$$\varphi_1=\varphi-n\pi$$

setzt,

$$\int_0^{n\pi+\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2nK+\int_0^{\beta}\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}.$$

Im zweiten Falle erhält man

$$\int_0^{n\pi-\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{n\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_{n\pi-\beta}^{n\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und wenn man hier

$$\varphi_1=n\pi-\varphi$$

setzt,

$$\int_0^{n\pi-\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2nK-\int_0^{\beta}\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1},$$

sodass man, beide Fälle umfassend, auch schreiben kann:

$$\int_0^{n\pi\pm\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2nK\pm\int_0^{\beta}\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}.$$

Hiedurch ist das Integral mit beliebiger Amplitude auf das vollständige Integral K und ein Integral, dessen Amplitude zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegt, zurückgeführt.

Setzt man jetzt:

$$\int_0^{\beta}\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}=u \quad \text{also} \quad \beta=am\,u,$$

so ist

$$\int_0^{n\pi\pm\beta}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2nK\pm u,$$

folglich

$$n\pi\pm\beta=am\,(2nK\pm u)$$

oder

$$am\,(2nK \pm u) = n\pi \pm am\,u = 2n\,.\,am\,K \pm am\,u$$

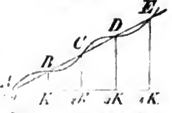
oder auch, weil

$$am\,(-z) = -am\,z,$$

$$am\,(u \pm 2nK) = am\,u \pm n\pi.$$

Die vorstehenden Betrachtungen setzen uns in den Stand, von dem Verlaufe der Function Amplitudo, wenigstens für reelle Argumente, eine Vorstellung zu gewinnen. Betrachtet man die Werthe von $am\,u$ als die Ordinaten einer Curve, deren Abscissen die zugehörigen Werthe von u sind, so entsprechen den Abscissen $o, K, 2K, 3K, 4K$, etc. die Ordinaten $o, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, etc. Die zugehörigen Puncte der Curve, A, B, C, D, E etc. (Fig. 2) liegen daher auf einer durch den Anfangspunct A gehenden Geraden. Da nun ferner $\frac{d\,.\,am\,u}{du} = \Delta\,am\,u$ ist und daher für $u = o$ und $= K$ die Werthe 1 und k' annimmt, so steigt die Curve im Puncte A unter einem Winkel von 45^0 an und vermindert allmälig ihre Steigung, bis im Puncte B die Tangente ihrer Neigung gegen die Abscissenaxe gleich k' geworden ist. Alsdann folgt aus der Gleichung

Fig. 2.



$$am\,(2K - u) = \pi - am\,u,$$

dass das Stück BC dem Stücke AB congruent ist, nur eine umgekehrte Lage erhalten hat, und aus der Gleichung

$$am\,(2K + u) = \pi + am\,u,$$

dass auch die Curvenstücke CDE und ABC congruent sind und gleich liegen. In dieser Weise setzt sich die Curve nach beiden Seiten ins Unendliche fort.

Die Periodicität der elliptischen Functionen folgt nun aus dem Vorhergehenden unmittelbar. Denn da

$$\sin\,(am\,u \pm 2\pi) = \sin\,am\,u$$

und

$$am\,u \pm 2\pi = am\,(u \pm 4K),$$

so folgt

$$\sin\,am\,(u \pm 4K) = \sin\,am\,u.$$

Also: **Die elliptischen Functionen bleiben unverändert, wenn man ihr Argument um die Grösse $4K$ vermehrt oder vermindert.**

Aus denselben Betrachtungen folgt aber auch, weil

$$\sin(\varphi \pm \pi) = -\sin\varphi$$

ist, sogleich

$$\sin am\,(u \pm 2K) = -\sin am\,u,$$

und wendet man dies auch auf Cosinus und Delta an, so erhält man vollständig die Formeln

$$(10)\begin{cases} \sin am\,(u \pm 4K) = \sin am\,u & \sin am\,(u \pm 2K) = -\sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 4K) = \cos am\,u & \cos am\,(u \pm 2K) = -\cos am\,u \\ \varDelta\,am\,(u \pm 4K) = \varDelta\,am\,u & \varDelta\,am\,(u \pm 2K) = \varDelta\,am\,u, \end{cases}$$

aus denen für $u = o$

$$\begin{array}{ll} \sin am\,4K = o & \sin am\,2K = o \\ \cos am\,4K = 1 & \cos am\,2K = -1 \\ \varDelta\,am\,4K = 1 & \varDelta\,am\,2K = 1 \end{array}$$

folgt.

Die Periode der elliptischen Functionen ist, wie man sieht, nicht eine absolute Zahl, wie die der trigonometrischen Functionen, sondern hängt von dem Modul ab. Ist daher der letztere nicht k sondern k', so ist auch der Index der Periode nicht $4K$, sondern $4K'$. Also hat man z. B.

$$\sin am\,(u \pm 4K', k') = \sin am\,(u, k').$$

§ 8.

Die elliptischen Functionen besitzen ausser dieser reellen Periode noch eine zweite, eine imaginäre. Um diese zu ermitteln, müssen wir zuerst die elliptischen Functionen mit imaginärem Argumente auf die Form complexer Grössen bringen. Zu dem Ende nehmen wir in dem Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

die Amplitude imaginär an*) und setzen

$$\sin\varphi = i\,\mathrm{tg}\,\psi;$$

dann wird

$$(11)\qquad \cos\varphi = \frac{1}{\cos\psi} \qquad \varDelta\varphi = \frac{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}}{\cos\psi} = \frac{\varDelta(\psi, k')}{\cos\psi}$$

---

*) Ueber die nähere Bedeutung eines Integrals mit imaginärer Variable verweisen wir auf Abschnitt XXI.

$$d\varphi = i\,\frac{d\psi}{\cos\psi},$$

mithin, da auch ψ und φ gleichzeitig verschwinden:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = i\int_0^\psi \frac{d\psi}{\varDelta(\psi, k')}.$$

Setzt man nun

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\varDelta(\psi, k')} = u \quad \text{also} \quad \psi = am\,(u, k'),$$

so wird

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = i\,u \quad \text{also} \quad \varphi = am\,(iu),$$

und substituirt man dies in die Formeln (11), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,iu &= i\,\mathrm{tg}\,am\,(u, k') \\ \cos am\,iu &= \frac{1}{\cos am\,(u, k')} \\ \varDelta\,am\,iu &= \frac{\varDelta\,am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')} \end{aligned}\right\} (12).$$

Diese Formeln zeigen ein merkwürdiges Verhalten der elliptischen Functionen: während nämlich die trigonometrischen und Exponentialfunctionen für imaginäre Argumente in einander übergehen, verwandeln sich die elliptischen Functionen für imaginäre Argumente in eben solche Functionen, deren Modul jedoch das Complement des ursprünglichen Modul ist.

Aus den Formeln (12) ergiebt sich nun die zweite imaginäre Periode der elliptischen Functionen. Da nämlich die rechten Theile dieser Formeln den Modul k' haben, so bleiben sie wegen der reellen Periodicität unverändert, wenn man in ihnen $u \pm 4K'$ statt u setzt. Thut man dies, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin am\,(iu \pm 4iK') &= i\,\mathrm{tg}\,am\,(u, k') = \sin am\,iu \\ \cos am\,(iu \pm 4iK') &= \frac{1}{\cos am\,(u, k')} = \cos am\,iu \\ \varDelta\,am\,(iu \pm 4iK') &= \frac{\varDelta\,am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')} = \varDelta\,am\,iu. \end{aligned}$$

Setzt man also wiederum u statt iu, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,(u \pm 4iK') &= \sin am\,u \\ \cos am\,(u \pm 4iK') &= \cos am\,u \\ \varDelta\,am\,(u \pm 4iK') &= \varDelta\,am\,u \end{aligned}\right\} (13).$$

Der Index der imaginären Periode ist also $4iK'$, wenn der Modul k ist und daher $4iK$, wenn der Modul k' ist.

Setzt man ebenso in den Formeln (12) $u \pm 2K'$ statt u und verfährt auf dieselbe Weise wie vorher, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (10)

$$(14) \begin{cases} \sin am\,(u \pm 2iK') = \sin am\, u \\ \cos am\,(u \pm 2iK') = -\cos am\, u \\ \Delta\, am\,(u \pm 2iK') = -\Delta\, am\, u. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich für $u = o$

$$\begin{array}{ll} \sin am\, 4iK' = o & \sin am\, 2iK' = o \\ \cos am\, 4iK' = 1 & \cos am\, 2iK' = -1 \\ \Delta\, am\, 4iK' = 1 & \Delta\, am\, 2iK' = -1. \end{array}$$

Endlich kann man die beiden Perioden auch mit einander verbinden, indem man in den Gleichungen (13) und (14) aufs neue resp. $u \pm 4K$ und $u \pm 2K$ statt u setzt, dann erhält man

$$\begin{array}{l} \sin am\,(u \pm 4K \pm 4iK') = \sin am\, u \\ \cos am\,(u \pm 4K \pm 4iK') = \cos am\, u \\ \Delta\, am\,(u \pm 4K \pm 4iK') = \Delta\, am\, u \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin am\,(u \pm 2K \pm 2iK') = -\sin am\, u \\ \cos am\,(u \pm 2K \pm 2iK') = +\cos am\, u \\ \Delta\, am\,(u \pm 2K \pm 2iK') = -\Delta\, am\, u \end{array}$$

und dann für $u = o$

$$\begin{array}{ll} \sin am\,(4K \pm 4iK') = o & \sin am\,(2K \pm 2iK') = o \\ \cos am\,(4K \pm 4iK') = 1 & \cos am\,(2K \pm 2iK') = 1 \\ \Delta\, am\,(4K \pm 4iK') = 1. & \Delta\, am\,(2K \pm 2iK') = -1. \end{array}$$

Dabei sind noch zwei Bemerkungen zu machen. Ebenso wie nämlich in der Trigonometrie bei der Tangente der Index der Periode halb so gross ist, wie bei den übrigen Functionen, so haben auch hier ausser den allgemeinen Perioden $4K$, $4iK'$, $4K \pm 4iK'$ die Functionen Tangens Amplitudo und Delta Amplitudo noch die Periode $2K$, Sinus Amplitudo noch die Periode $2iK$ und Cosinus Amplitudo noch die Periode $2K \pm 2iK'$. Zweitens ist darauf aufmerksam zu machen, dass wir hier für gewisse imaginäre Argumente negative Werthe der Function $\Delta\, am\, u$ erhalten.

§ 9.

Wir wollen nun zunächst die gewonnenen Resultate auf die Pendelaufgabe anwenden. Aus der Gleichung (6) § 6

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \varphi$$

folgt, dass für den Werth $\frac{\pi}{2}$ von φ, ψ den Werth α annimmt; bezeichnet nun T den Zeitraum, der verfliesst, während ψ von o bis α wächst, d. h. während das Pendel sich aus der Verticallinie bis zu seiner grössten Ablenkung bewegt; mit andern Worten, bedeutet T die halbe Schwingungsdauer, so erhält man aus (7)

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Schwingungsdauer nicht von der grössten Ablenkung unabhängig ist, sondern vielmehr mit derselben wächst, wie dies mit der Erfahrung übereinstimmt.

Setzt man nun in der Formel (8)

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{K}{T}$$

so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin am \frac{K}{T} t.$$

So oft nun die Zeit um T wächst, wächst das Argument der Amplitude um K. Daher entsprechen

den Werthen $o,\ T,\ 2\,T,\ 3\,T,\ 4\,T$, etc. von t

resp. die Werthe $o,\ K,\ 2\,K,\ 3\,K,\ 4\,K$, etc. von $\frac{K}{T}t$

und die Werthe $o,\ \alpha,\ \ o,\ -\alpha,\ \ o$, etc. von ψ.

Zweien Zeiten ferner, welche um $2\ T$ aus einander liegen, entsprechen zwei Werthe von $\frac{K}{T}t$, die um $2\ K$ von einander verschieden sind. Ihnen gehören also zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $\sin am \frac{K}{T}t$ und daher auch zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von ψ an. Ebenso entsprechen zweien Zeiten, die um $4\ T$ aus einander liegen, zwei gleiche Werthe von ψ.

§ 10.

Wir gehen nun dazu über, diejenigen Relationen zwischen elliptischen Functionen aufzusuchen, welche den trigonometrischen Formeln

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

analog sind. Dazu bedürfen wir einer Transformation, die, wie wir später sehen werden*), mit der Substitution $\sin\varphi = i \operatorname{tg}\psi$ aus derselben Quelle fliesst.

Wir setzen jetzt in dem Integral $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi}.$$

Dann folgt

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\varphi = \dfrac{k' \sin\psi}{\Delta\psi} & \Delta\varphi = \dfrac{k'}{\Delta\psi} \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$\cos\varphi \,.\, d\varphi = -\frac{k'^2 \sin\psi}{\Delta^3\psi}\, d\psi;$$

mithin

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Da aber jetzt $\psi = \frac{\pi}{2}$ für $\varphi = o$ wird, so erhält man:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi},$$

also

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Setzt man nun

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} = u \quad \text{also} \quad \psi = am\, u,$$

so ist

*) Vgl. Abschnitt VI.

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = K - u \quad \text{also} \quad \varphi = am\,(K-u),$$

und substituirt man dies in die Formeln (15), so ergeben sich die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,(K-u) = \frac{\cos am\,u}{\varDelta\,am\,u}, \ \cos am\,(K-u) = \frac{k' \sin am\,u}{\varDelta\,am\,u}, \\ \varDelta\,am\,(K-u) = \frac{k'}{\varDelta\,am\,u} \end{aligned}\right\} (16).$$

Jacobi hat für die Function $am\,(K-u)$ noch eine andere Bezeichnung eingeführt. Weil nämlich die Grösse K sich zu einem beliebigen Argument u ähnlich verhält, wie $\frac{\pi}{2}$ zu einem beliebigen Bogen φ, so hat Jacobi die Amplitude von $K-u$ das Complement der Amplitude von u oder die Coamplitude von u genannt und demgemäss gesetzt

$$am\,(K-u) = coam\,u.$$

Mit dieser Bezeichnung kann man die vorigen Formeln auch so schreiben:

$$\sin coam\,u = \frac{\cos am\,u}{\varDelta\,am\,u}, \quad \cos coam\,u = \frac{k' \sin am\,u}{\varDelta\,am\,u},$$
$$\varDelta\,coam\,u = \frac{k'}{\varDelta\,am\,u}.$$

Man könnte aus diesen Formeln, indem man $u = o$ setzt, die Werthe von $\sin am\,K$, $\cos am\,K$, $\varDelta\,am\,K$ nochmals ableiten. Da wir aber diese schon kennen, so wollen wir, indem wir $u = \frac{K}{2}$ setzen, die Werthe der elliptischen Functionen für dieses Argument ermitteln. Man erhält dann

$$\sin am\,\frac{K}{2} = \frac{\cos am\,\frac{K}{2}}{\varDelta\,am\,\frac{K}{2}}; \ \cos am\,\frac{K}{2} = \frac{k' \sin am\,\frac{K}{2}}{\varDelta\,am\,\frac{K}{2}},$$
$$\varDelta\,am\,\frac{K}{2} = \frac{k'}{\varDelta\,am\,\frac{K}{2}}$$

und daraus

$$\sin am\,\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \cos am\,\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \varDelta\,am\,\frac{K}{2} = \sqrt{k'}.$$
$$\operatorname{tg} am\,\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{k'}},$$

also auch

$$am\,\frac{K}{2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1}{k'}}.$$

Aus den Formeln (16) ergeben sich sogleich die entsprechenden für $K + u$, wenn man $-u$ statt u setzt; führt man ausserdem noch $u - K$ statt $K - u$ ein, so ergiebt sich:

$$(17) \quad \begin{cases} \sin am\,(u \pm K) = \pm \dfrac{\cos am\, u}{\varDelta\, am\, u} \\ \cos am\,(u \pm K) = \mp \dfrac{k' \sin am\, u}{\varDelta\, am\, u} \\ \varDelta\, am\,(u \pm K) = + \dfrac{k'}{\varDelta\, am\, u}, \end{cases}$$

worin die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Wendet man nun diese Formeln nochmals an und zieht auch die Formeln (12) zu Hülfe, so erhält man auch Ausdrücke für die elliptischen Functionen der Argumente $iu + K$, $u + iK'$, $u + K + iK'$ und $iu + K + iK'$.

Setzt man zuerst in (17) iu statt u und wendet (12) an, so erhält man

$$(18) \quad \begin{cases} \sin am\,(iu \pm K) = \pm \dfrac{1}{\varDelta\, am\,(u, k')} \\ \cos am\,(iu \pm K) = \mp \dfrac{i\, k' \sin am\,(u, k')}{\varDelta\, am\,(u, k')} \\ \varDelta\, am\,(iu \pm K) = + \dfrac{k' \cos am\,(u, k')}{\varDelta\, am\,(u, k')}. \end{cases}$$

Setzt man ferner in (12) $u \pm K'$ statt u und wendet (17) an, indem man K' mit K also auch k mit k' vertauscht, so erhält man:

$$\sin am\,(iu \pm iK') = - \frac{i \cos am\,(u, k')}{k \sin am\,(u, k')}$$

$$\cos am\,(iu \pm iK') = \mp \frac{\varDelta\, am\,(u, k')}{k \sin am\,(u, k')}$$

$$\varDelta\, am\,(iu \pm iK') = \mp \frac{1}{\sin am\,(u, k')}.$$

Drückt man aber wiederum mittelst (12) die elliptischen Functionen mit dem Modul k' durch solche mit dem Modul k aus, und setzt alsdann u statt iu, so erhält man

$$\sin am\,(u \pm iK') = + \frac{1}{k \sin am\, u}$$

$$\cos am\,(u \pm iK') = \mp \frac{i\, \varDelta\, am\, u}{k . \sin am\, u}$$

$$\varDelta\, am\,(u \pm iK') = \mp\, i \cotg am\, u.$$

Setzt man in diesen Formeln $u = o$, so ergiebt sich, dass die Ausdrücke

$$\sin am\,(\pm iK'),\ \cos am\,(\pm iK'),\ \Delta\, am\,(\pm iK')$$

unendlich gross sind.

In den vorigen Formeln substituiren wir nun wieder $u+K$ und $u-K$ statt u, dann ergiebt sich mit Hülfe von (17)

$$\sin am\,(u+K\pm iK') = +\frac{\Delta\, am\, u}{k.\cos am\, u}$$

$$\cos am\,(u+K\pm iK') = \mp\frac{ik'}{k\cos am\, u}$$

$$\Delta\, am\,(u+K\pm iK') = \pm ik'\,\mathrm{tg}\, am\, u$$

und

$$\sin am\,(u-K\pm iK') = -\frac{\Delta\, am\, u}{k\cos am\, u}$$

$$\cos am\,(u-K\pm iK') = \pm\frac{ik'}{k\cos am\, u}$$

$$\Delta\, am\,(u-K\pm iK') = \pm ik'\,\mathrm{tg}\, am\, u,$$

woraus für $u=o$ folgt

$$\sin am\,(K\pm iK') = \frac{1}{k}\cdot$$

$$\cos am\,(K\pm iK') = \mp\frac{ik'}{k}$$

$$\Delta\, am\,(K\pm iK') = o.$$

Es sind also $K\pm iK'$ die beiden Werthe von u, für welche $\Delta\, am\, u$ verschwindet.

Endlich setzen wir noch in den beiden letzten Formelsystemen iu statt u, und wenden wieder (12) an, so ergiebt sich:

$$\sin am\,(iu+K\pm iK') = +\frac{\Delta\, am\,(u,k')}{k}$$

$$\cos am\,(iu+K\pm iK') = \mp\frac{ik'\cos am\,(u,k')}{k}$$

$$\Delta\, am\,(iu+K\pm iK') = \mp k'\sin am\,(u,k')$$

und

$$\sin am\,(iu-K\pm iK') = -\frac{\Delta\, am\,(u,k')}{k}$$

$$\cos am\,(iu-K\pm iK') = \pm\frac{ik'\cos am\,(u,k')}{k}$$

$$\Delta\, am\,(iu-K\pm iK') = \mp k'\sin am\,(u,k').$$

Vergleicht man diese grosse Menge von Formeln mit den beiden ihnen entsprechenden trigonometrischen Formeln, so lässt sich der Reichthum von analytischen Beziehungen nicht verkennen, den die elliptischen Functionen darbieten.

Eine Eigenthümlichkeit, die diese Formeln zeigen, verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, nämlich die, dass

überall die Ausdrücke für Sinus, Cosinus und Delta bei allen drei Functionen denselben Nenner haben, abgesehen von einer Constanten. Dies ist natürlich nicht zufällig, sondern hat darin seinen Grund, dass die drei Functionen Sinus, Cosinus und Delta gleichzeitig unendlich werden, wie aus den Formeln

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi; \quad \Delta^2\varphi = 1 - k^2\sin^2\varphi$$

leicht erhellt, nämlich, wie wir oben fanden, für die beiden Werthe

$$u = \pm iK'.$$

Die Anwendung dieser Eigenschaft ist häufig bei den späteren Entwickelungen von Nutzen und kann zur Ersparung weitläufiger Rechnungen dienen.

Ausserdem haben obige Formeln als Transformationsformeln grosse Bedeutung, weil man mit ihrer Hülfe durch Substitution der Argumente $u + K$, $u + iK'$, etc. an Stelle von u leicht von einer elliptischen Function zu einer andern übergehen kann.

Dritter Abschnitt.

Von der Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

---

§ 11.

Die Einführung der elliptischen Functionen durch Umkehrung des elliptischen Integrals beruht, wie wir gesehen haben, wesentlich auf einer gewissen einfachen Form des letzteren, die man die Normalform nennt, nämlich der Form

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wir haben ferner in dem Beispiele von der Bewegung des ebenen Pendels gesehen, dass das elliptische Integral sich nicht immer von selbst in der gewünschten Form darbietet, sondern erst durch geeignete Substitutionen auf dieselbe zurückgeführt werden muss, und dass dann die Substitutionsformel von der grössten

Wichtigkeit ist, indem z. B. bei der Pendelaufgabe von ihr der Ausdruck, durch welchen die Ablenkung ψ durch die Zeit ausgedrückt wird, abhängt. Es ist daher nun von Wichtigkeit, zu zeigen, dass und wie man jedes beliebige elliptische Integral auf drei bestimmte einfache Formen reduciren kann, die man nach Legendre die elliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung nennt. Das bis jetzt betrachtete Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

durch dessen Umkehrung die elliptischen Functionen entstanden, bildet die erste Gattung.

Aus der Integralrechnung ist bekannt, dass man das Integral einer jeden algebraischen rationalen und jeder solchen irrationalen Function, die auf ihre einfachste Gestalt gebracht, nur die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke des ersten oder zweiten Grades enthält, auf algebraische, cyclometrische Functionen oder Logarithmen zurückführen kann. Uebersteigt jedoch die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen den zweiten Grad, so ist die Reduction auf die genannten Functionen nicht mehr möglich, vielmehr hat man es dann mit wesentlich neuen Functionen zu thun. Elliptische Integrale, im weitesten Sinne des Wortes genommen, nennt man nun die Integrale solcher algebraischer irrationaler Functionen, die eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck entweder des dritten oder des vierten Grades enthalten. Wir werden später sehen, dass der erstere Fall, wenn das Radical vom dritten Grade ist, sich als ein specieller Fall davon, dass es vom vierten Grade ist, ansehen lässt. Bezeichnet man daher mit R eine Wurzelgrösse vierten Grades

$$R = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$$

und mit f eine algebraische rationale Function, so ist

$$\int f(x, R)\, dx$$

die allgemeinste Form eines elliptischen Integrals.

Bezeichnen nun $M, M', M'', \ldots.; P, P', P'', \ldots.$ rationale Functionen von x, so ist

$$\frac{M + M' R + M'' R^2 + M''' R^3 + \ldots.}{P + P' R + P'' R^2 + P''' R^3 + \ldots.}$$

die allgemeinste Form der Function f, die sich, weil sämmtliche geraden Potenzen von R rationale Functionen von x sind, und sämmtliche ungeraden Potenzen von R sich als Producte aus R in rationale Functionen von x darstellen lassen, auf die Form

$$\frac{m + m' R}{p + p' R}$$

reducirt, worin m, m', p, p' wiederum rationale Functionen von x bedeuten. Jedes elliptische Integral lässt sich hienach auf die Form

$$\int \frac{m + m' R}{p + p' R} dx$$

bringen. Multiplicirt man den in diesem Integral enthaltenen Bruch im Zähler und Nenner mit $p - p' R$, so erhält man

$$\int \frac{mp - m' p' R^2 + (m' p - m p') R}{p^2 - p'^2 R^2} dx.$$

Setzt man aber

$$\frac{mp - m' p' R^2}{p^2 - p'^2 R^2} = L, \quad \frac{m' p - m p'}{p^2 - p'^2 R^2} = N,$$

so sind L und N wiederum rationale Functionen von x, und es wird

$$\int f(x, R)\, dx = \int L dx + \int N R dx.$$

Hienach zerlegt sich ein elliptisches Integral im Allgemeinen in zwei Theile, von denen der eine, $\int L dx$, da er ein Integral einer rationalen Function ist, durch eine algebraische, eine cyclometrische Function, oder einen Logarithmus ausgedrückt werden kann, der andere, $\int N R dx$, dagegen ein elliptisches Integral ist. Natürlich wird es häufig vorkommen, dass die Function L Null ist, sodass alsdann der Theil des Integrals, der nicht elliptisch ist, verschwindet. Wir haben es nun bloss mit dem zweiten Theile zu thun, der sich auch

$$\int \frac{N R^2}{R} dx$$

schreiben lässt, oder wenn man

$$N R^2 = F(x),$$

setzt, die Form

$$\int \frac{F(x)\, dx}{R}.$$

hat, wo jetzt $F(x)$ eine algebraische rationale Function von x bedeutet.

Von der Beschaffenheit der Function $F(x)$ hängt es nun ab, welcher der drei Gattungen das elliptische Integral angehört, und es sei darüber gleich so viel bemerkt, dass, wenn die Function F nur eine Constante ist, man die erste Gattung erhält; enthält aber $F(x)$ wirklich x, so wird man auf die zweite oder dritte Gattung geführt; es kann aber auch der Fall eintreten, dass das Integral aufhört, ein elliptisches zu sein.

§ 12.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass $F(x)$ eine Constante ist, beschäftigen uns also mit dem Integral

$$\int \frac{dx}{R} = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}.$$

Stellt man die Gleichung

$$R^2 = o$$

auf, so hat dieselbe, da sie vom 4ten Grade ist, entweder 4 reelle, oder 2 reelle und 2 imaginäre, oder 4 imaginäre Wurzeln. Wir nehmen diese Wurzeln als bekannt an und bezeichnen sie mit

$$o, p, \omega, \pi,$$

wobei in dem Falle, dass imaginäre Wurzeln vorhanden sind, p dem o, und π dem ω conjugirt sein möge. Es sei ferner

$$(x - o)\,(x - p)\,(x - \omega)\,(x - \pi) = R'^2,$$

also auch

$$R^2 = A \,.\, R'^2.$$

Wie auch die Wurzeln beschaffen sein mögen, man kann stets R'^2 in zwei reelle quadratische Factoren zerfällen, also setzen

$$R'^2 = [(x - m)^2 + n]\,[(x - \mu)^2 + \nu].$$

Durch die Wurzeln ausgedrückt, ist dann

$$(x - m)^2 + n = (x - o)\,(x - p); \quad (x - \mu)^2 + \nu = (x - \omega)\,(x - \pi),$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{o + p}{2} & \mu &= \frac{\omega + \pi}{2} \\ n &= -\left(\frac{o - p}{2}\right)^2 & \nu &= -\left(\frac{\omega - \pi}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

folgt. Daraus geht hervor, dass m, n, μ, ν in der That reell

sind, und ferner, dass n und ν negativ oder positiv ausfallen, je nachdem resp. o, p und ω, π reell oder imaginär sind.

Die erste zu erfüllende Forderung ist nun die, den Ausdruck R'^2 in einen ähnlichen umzuformen, der aber die ungeraden Potenzen der Veränderlichen nicht mehr enthält. Dies kann auf sehr verschiedene Weise und namentlich durch Substitutionen von sehr verschiedener Ordnung geschehen. Wir wollen hier nur eine Substitution der ersten Ordnung und für den Fall, dass alle vier Wurzeln reell sind, ihrer häufigen Anwendung wegen, im Abschnitt VI. eine Substitution der zweiten Ordnung benutzen. Dabei folgen wir dem von Richelot in der Abhandlung: „Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform," (Crelle's Journ. Bd. 34.) eingehaltenen Gange.

Setzt man

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x-m}{x-\mu} = \frac{r-sy}{\varrho-\sigma y},$$

so hat man 4 Grössen, r, s, ϱ, σ, über die man so verfügen kann, dass der Ausdruck R'^2, durch y ausgedrückt, die ungeraden Potenzen von y nicht enthält.

Aus (2) folgt zunächst

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{x-m}{m-\mu} = \frac{r-sy}{\varrho-r-(\sigma-s)y};\ \frac{x-\mu}{m-\mu} = \frac{\varrho-\sigma y}{\varrho-r-(\sigma-s)y}$$

und hieraus

$$(4) \quad \ldots \quad R'^2 = \frac{(m-\mu)^2(r-sy)^2+n[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2}{[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2} \cdot \frac{(m-\mu)^2(\varrho-\sigma y)^2+\nu[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2}{[\varrho-r-(\sigma-s)y]^2}.$$

Soll nun in beiden Factoren das in y multiplicirte Glied verschwinden, so erhält man zur Bestimmung von r, s, ϱ, σ die Gleichungen

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases}(m-\mu)^2 r s + n(\varrho-r)(\sigma-s) = o\\ (m-\mu)^2 \varrho\sigma + \nu(\varrho-r)(\sigma-s) = o.\end{cases}$$

Da dies nur zwei Gleichungen sind, so bleiben zwei der zu bestimmenden Grössen willkürlich. Wählt man die Verhältnisse $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ als die durch die Coefficienten des Ausdruckes R'^2 auszudrückenden Grössen, so ergiebt sich aus (5) durch Division

$$\frac{r}{\varrho} \cdot \frac{s}{\sigma} = \frac{n}{\nu},$$

und da man die zweite der Gleichungen (5) schreiben kann

$$(m-\mu)^2+\nu\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)$$
$$=(m-\mu)^2+\nu\left[1-\left(\frac{r}{\varrho}+\frac{s}{\sigma}\right)+\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{s}{\sigma}\right]=o,$$

wenn man den ebengefundenen Werth von $\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{s}{\sigma}$ substituirt,

$$\nu\left(\frac{r}{\varrho}+\frac{s}{\sigma}\right)=(m-\mu)^2+n+\nu.$$

Alsdann folgt sogleich (6)

$$\nu\left(\frac{r}{\varrho}-\frac{s}{\sigma}\right)=\pm\sqrt{[(m-\mu)^2+n+\nu]^2-4n\nu},$$

wodurch $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ im Uebrigen eindeutig bestimmt sind, nur dass es willkürlich bleibt, ob man die Differenz $\frac{r}{\varrho}-\frac{s}{\sigma}$ positiv oder negativ, d. h. $\frac{r}{\varrho}>$ oder $<\frac{s}{\sigma}$ nimmt, wodurch die Werthe dieser Grössen nur mit einander vertauscht werden. Ob aber die Substitution auch reelle Werthe für $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ liefert, hängt davon ab, ob der Ausdruck

$$W=[(m-\mu)^2+n+\nu]^2-4n\nu,$$

den wir der Kürze wegen mit W bezeichnen, positiv ist oder nicht. Nun erhellt zuerst, dass W positiv wird, wenn eine der Grössen n und ν positiv und die andere negativ ist. Dieser Fall tritt aber ein, wenn die Gleichung $R'^2=o$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Giebt man ferner der Grösse W die Form

$$W=[(m-\mu)^2+n-\nu]^2+4(m-\mu)^2\nu,$$

so sieht man, dass sie positiv wird, sobald nur ν positiv ist, d. h. sobald die Gleichung $R^2=o$ überhaupt ein Paar imaginärer Wurzeln hat, gleichviel ob das andere Paar reell oder imaginär ist. Wenn also imaginäre Wurzeln vorhanden sind, erweist sich die Transformation stets als reell. Für den dritten Fall der Realität aller vier Wurzeln endlich sind n und ν beide negativ und dann kann man W in zwei reelle Factoren zerlegen, indem man

$$W=[(m-\mu)^2+n+\nu+2\sqrt{n\nu}]\,[(m-\mu)^2+n+\nu-2\sqrt{n\nu}]$$
$$=[(m-\mu)^2-(\sqrt{-n}+\sqrt{-\nu})^2]\,[(m-\mu)^2-(\sqrt{-n}-\sqrt{-\nu})^2]$$

erhält. Drückt man aber dies durch die Wurzeln der Gleichung $R'^2=o$ den Formeln (1) gemäss aus, so erhält man

$$W=\left[\left(\frac{o+p-\omega-\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{o-p+\omega-\pi}{2}\right)^2\right]\cdot$$
$$\left[\left(\frac{o+p-\omega-\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{o-p-\omega+\pi}{2}\right)^2\right]$$
$$=(o-\pi)\,(p-\omega)\,(o-\omega)\,(p-\pi).$$

Diesen Ausdruck kann man durch zweckmässige Anordnung der 4 Wurzeln stets positiv machen. Des Folgenden wegen möge aber die nähere Betrachtung dieses Ausdrucks hier gleich angeschlossen werden. Er wird in folgenden 4 Fällen positiv:

1) Wenn o und p beide grösser als ω und π sind
2) „ o „ p „ kleiner „ ω „ π „
3) „ o „ p „ zwischen ω und π liegen
4) „ ω „ π „ „ o „ p „ .

Der gemeinsame Charakter dieser vier Anordnungen lässt sich dahin aussprechen, dass sowohl o und p als auch ω und π je zwei der Grösse nach auf einander folgende Wurzeln sein müssen, wenn man auch die grösste und kleinste Wurzel als auf einander folgende gelten lässt, indem man nämlich annimmt, dass man durch das Unendliche hindurch entweder von der grössten zur kleinsten in fortwährendem Zunehmen oder von der kleinsten zur grössten in fortwährendem Abnehmen fortschreitet. Hält man dieses fest und bemerkt zugleich, dass die drei letzteren Anordnungen aus der ersten durch cyclische Vertauschung entstehen, so kann man leicht sämmtliche Anordnungen, in denen W positiv wird, aufstellen. Es giebt zunächst, wie leicht zu sehen, vier Anordnungen, bei welchen o und p beide grösser als ω und π sind, nämlich, wenn man die Wurzeln ihrer Grösse nach hinter einander setzt, mit der grössten beginnend, die folgenden:

$$o\,p\,\omega\,\pi,\quad o\,p\,\pi\,\omega,\quad p\,o\,\omega\,\pi,\quad p\,o\,\pi\,\omega.$$

Durch cyclische Vertauschung liefern dieselben die folgenden 16 Anordnungen, bei welchen W positiv wird:

$$1)\left\{\begin{array}{cccc} o & p & \omega & \pi \\ p & \omega & \pi & o \\ \omega & \pi & o & p \\ \pi & o & p & \omega \end{array}\right.\quad 2)\left\{\begin{array}{cccc} o & p & \pi & \omega \\ p & \pi & \omega & o \\ \pi & \omega & o & p \\ \omega & o & p & \pi \end{array}\right.\quad 3)\left\{\begin{array}{cccc} p & o & \omega & \pi \\ o & \omega & \pi & p \\ \omega & \pi & p & o \\ \pi & p & o & \omega \end{array}\right.\quad 4)\left\{\begin{array}{cccc} p & o & \pi & \omega \\ o & \pi & \omega & p \\ \pi & \omega & p & o \\ \omega & p & o & \pi. \end{array}\right.$$

Dabei ist zugleich ersichtlich, dass die Gruppen 3) und 4) aus den Gruppen 1) und 2) entstehen, wenn man die Grössen gerade in umgekehrter Ordnung nimmt.

In den noch übrigen möglichen 8 Anordnungen, bei welchen die Wurzeln o, p und ω, π in einander geschoben sind, wird W negativ; es sind die folgenden:

$$\begin{array}{ll} o\,\omega\,p\,\pi & \omega\,o\,\pi\,p \\ \omega\,p\,\pi\,o & o\,\pi\,p\,\omega \\ p\,\pi\,o\,\omega & \pi\,p\,\omega\,o \\ \pi\,o\,\omega\,p & p\,\omega\,o\,\pi. \end{array}$$

Auch hier entsteht die zweite Gruppe durch Umkehrung der Reihenfolge der ersten.

Nachdem wir die Ueberzeugung gewonnen haben, dass man mittelst der Formeln (6) die Verhältnisse $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ stets reell aus den gegebenen Coefficienten des Ausdrucks R'^2 bestimmen kann, nehmen wir nun die Grössen r, ϱ, s, σ als bekannt an (zwei derselben bleiben natürlich willkürlich) und führen die Reduction des Differentials $\frac{dx}{R}$ zu Ende. Man bemerke dabei, dass von den beiden Factoren, welche den Ausdruck (4) für R'^2 bilden, der zweite aus dem ersten entsteht, wenn man die lateinischen Buchstaben mit den griechischen vertauscht. Setzt man nun der Kürze wegen

$$\varrho - r - (\sigma - s)\, y = N,$$

so erhält man, da r, ϱ, s, σ so bestimmt sind, dass die erste Potenz von y verschwindet, für den ersten Factor

$$N^2\,((x-m)^2+n) = (m-\mu)^2\, r^2 + n\,(\varrho - r)^2 + [(m-\mu)^2 s^2 + n\,(\sigma - s)^2]\, y^2,$$

oder wenn man für n den aus (5) gezogenen Werth

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad n = -\frac{(m-\mu)^2\, rs}{(\varrho - r)\,(\sigma - s)}$$

substituirt,

$$N^2\,((x-m)^2+n) = (m-\mu)^2 \left\{ r^2 - \frac{rs\,(\varrho - r)}{\sigma - s} + \left[s^2 - \frac{rs\,(\sigma - s)}{\varrho - r}\right] y^2 \right\}$$

$$= (m-\mu)^2 \left\{ \frac{r^2\,(\sigma - s) - rs\,(\varrho - r)}{\sigma - s} + \left[\frac{s^2\,(\varrho - r) - rs\,(\sigma - s)}{\varrho - r}\right] y^2 \right\}$$

$$= (m-\mu)^2\,(r\sigma - \varrho s) \left\{ \frac{r}{\sigma - s} - \frac{s}{\varrho - r}\, y^2 \right\}.$$

Durch Vertauschung der lateinischen mit den griechischen Buchstaben ergiebt sich daraus sogleich für den zweiten Factor:

$$N^2((x-\mu)^2+\nu) = (m-\mu)^2 (r\sigma - \varrho s)\left\{\frac{\varrho}{\sigma - s} - \frac{\sigma}{\varrho - r} y^2\right\}.$$

Setzt man nun

$$(8) \quad . \quad . \quad \begin{cases} (m-\mu)\dfrac{r}{\sigma - s} = L & (m-\mu)\dfrac{\varrho}{\sigma - s} = L' \\ (m-\mu)\dfrac{s}{\varrho - r} = M & (m-\mu)\dfrac{\sigma}{\varrho - r} = M', \end{cases}$$

so erhält man

$$R' = \frac{(m-\mu)(r\sigma - \varrho s)}{N^2}\sqrt{(L-My^2)(L'-M'y^2)}.$$

Durch Differentiation eines der beiden Ausdrücke (3) folgt ferner:

$$dx = (m-\mu)\frac{(\sigma - s)(r - sy) - s(\varrho - r - (\sigma - s)y)}{N^2} dy$$

$$= (m-\mu)\frac{r\sigma - \varrho s}{N^2} dy,$$

mithin

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{dy}{\sqrt{(L-My^2)(L'-M'y^2)}}.$$

Nachdem hiedurch das Radical für alle Fälle in seine zwei reinen quadratischen Factoren zerfällt ist, kann dasselbe, je nachdem alle 4 Wurzeln, oder nur 2, oder keine reell sind, in eine der Formen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},\ \sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2z^2)},\ \sqrt{(1+z^2)(1+\lambda^2z^2)}$$

gebracht werden. Nämlich setzt man

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{M}{L} y^2 = z^2,$$

so erhält man

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{ALL'}} \frac{dy}{\sqrt{\left(1-\frac{M}{L}y^2\right)\left(1-\frac{M'}{L'}y^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{AML'}} \frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{LM'}{ML'}z^2\right)}}.$$

Setzt man daher auch noch

$$\frac{LM'}{ML'} = k^2,$$

so wird

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{AML'}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Allein wie aus (9) erhellt, ist diese Reduction nur reell, wenn L und M gleiches Zeichen haben, und wenn auch dieses der Fall

ist, so wird doch k imaginär, wenn L' und M' von verschiedenem Zeichen sind. Nun ergiebt sich aber aus (8) mit Rücksicht auf die Gleichungen (5)

$$ML = -n \qquad M'L' = -\nu.$$

Mithin haben M, L gleiches Zeichen, wenn die Wurzeln o und p reell sind, und ebenso sind M', L' von gleichem Zeichen, wenn ω und π reell sind. Die vorstehende Transformation ist also reell, wenn alle vier Wurzeln reell sind.

Sind zweitens o und p reell, dagegen ω und π imaginär, so ist $\frac{M}{L}$ positiv, daher z reell, aber $\frac{M'}{L'}$ negativ. Setzt man daher

$$\frac{L \, . \, M'}{M \, . \, L'} = -\lambda^2,$$

so wird für den Fall, dass nur zwei Wurzeln reell sind,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{AML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)}}.$$

Sind endlich drittens sowohl o und p als auch ω und π imaginär, so ist sowohl $\frac{M}{L}$ als auch $\frac{M'}{L'}$ negativ. Dann setze man

$$-\frac{M}{L} y^2 = z^2,$$

wodurch man

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \frac{dz}{\sqrt{\left(1+z^2\right)\left(1+\frac{LM'}{ML'} z^2\right)}}$$

erhält, oder wenn man

$$(10) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{LM'}{ML'} = \lambda^2$$

setzt, für den Fall, dass keine Wurzel reell ist,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+\lambda^2 z^2)}}.$$

Jede dieser drei Formen geht nun in die gemeinschaftliche Normalform

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

über, wenn man

im ersten Falle $z = \sin \varphi$
im zweiten „ $z = \cos \varphi$
im dritten „ $z = \operatorname{tg} \varphi$

setzt. Die Substitution $z = \sin \varphi$ des ersten Falles ist schon § 3 erwähnt worden; sie giebt

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{AML'}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Im zweiten Falle erhält man

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -d\varphi; \sqrt{1+\lambda^2 z^2} = \sqrt{1+\lambda^2-\lambda^2\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\sin^2\varphi},$$

mithin, wenn

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{M'L}{ML'-M'L} = k^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{dx}{R} = -\frac{1}{\sqrt{A(ML'-M'L)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Im dritten Falle erhält man durch $z = \operatorname{tg}\varphi$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}; \sqrt{1+\lambda^2 z^2} = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi}$$

also, wenn

$$1-\lambda^2 = \frac{ML'-M'L}{ML'} = k^2$$

gesetzt wird,

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-AML'}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Hiedurch ist für alle Fälle die Reduction auf die Normalform ausgeführt. Allein damit diese Reduction reelle Formen liefere, muss im ersten Falle $z < 1$ und $k < 1$ sein. Im zweiten Falle muss ebenfalls $z < 1$ sein, dagegen erleidet λ keine Beschränkung, weil $k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$ immer kleiner als 1 ist. Im dritten Falle endlich kann z beliebig sein, weil es der Tangente gleich gesetzt wird, dagegen muss $\lambda < 1$ sein, wenn k reell und kleiner als 1 werden soll.

Wir werden nun zuerst den dritten Fall betrachten, weil derselbe sich kurz erledigt und dann, da z alle beliebigen Werthe annehmen kann, keiner weiteren Erörterungen bedarf. Beim ersten und zweiten Falle müssen wir jedoch, und das soll im nächsten § geschehen, auf die Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ und auf das Intervall der Werthe, welche die Variable x bei der Integration durchläuft, Rücksicht nehmen.

Im dritten Falle war nämlich (10)

$$\lambda^2 = \frac{LM'}{ML'};$$

aus (8) folgt aber

$$\frac{L}{L'} = \frac{r}{\varrho} \qquad \frac{M'}{M} = \frac{\sigma}{s},$$

mithin ist

$$\lambda^2 = \frac{r}{\varrho}\,\frac{\sigma}{s};\ k^2 = 1 - \lambda^2 = -\frac{\sigma}{s}\left(\frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma}\right).$$

Nun blieb in den Formeln (6) das Zeichen der Differenz $\frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma}$ noch willkürlich, man kann es also immer so wählen, dass k^2 positiv ausfalle, wodurch zugleich λ^2 und also auch k^2 kleiner als 1 wird. Man erhält ferner aus (8) und (7)

$$ML' = \frac{(m-\mu)^2\,\varrho s}{(\varrho - r)\,(\sigma - s)} = -\frac{n\varrho s}{rs} = -n \cdot \frac{\varrho}{r},$$

und dadurch geht die Formel (11) über in

$$\frac{dx}{R} = \sqrt{\frac{1}{An}\,\frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

§ 13.

Wir gehen nun zu einer näheren Betrachtung des ersten Falles über, die zugleich zu Vorschriften führen wird, wie man in jedem Falle die entsprechenden Substitutionen zur Reduction in die Normalform, gleich durch die Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ ausgedrückt, finden kann.

Wir haben gesehen, dass man immer durch eine Substitution der ersten Ordnung, welche zwei zu bestimmende Constanten enthält, den Ausdruck

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx}{\sqrt{A(x-o)\,(x-p)\,(x-\omega)\,(x-\pi)}}$$

auf die Form

$$C\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

in welcher C eine constante Grösse bedeutet, zurückführen kann.

Da das Radical R verschwindet, wenn x einen der Werthe o, p, ω, π annimmt, der Ausdruck $(1-z^2)\,(1-k^2z^2)$ aber zu Null wird, wenn z einen der Werthe $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ erhält, so folgt, dass die Substitution der Art sein muss, dass jedem der Werthe o, p, ω, π von x einer der Werthe $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ von z entspreche. Welcher Werth von z jedem einzelnen der Werthe von x zugehöre, ist willkürlich anzunehmen,

nur muss darauf Rücksicht genommen werden, dass o und p, und ebenso auch ω und π je zwei auf einander folgende Wurzeln werden, damit nach dem vorigen § die Transformation reell ausfalle. Wenn nun aber k ein positiver echter Bruch ist, und dies wollen wir ja zu bewirken suchen, so folgen die vier Werthe von z, für welche das Radical in z verschwindet, in folgender Reihe der Grösse nach auf einander:

$$(12) \quad \ldots \quad +\frac{1}{k}, +1, -1, -\frac{1}{k}.$$

Es wird also der genannten Bedingung genügt werden, wenn wir annehmen, dass diesen Werthen von z der Reihe nach die Werthe

$$\omega,\ o,\ p,\ \pi$$

von x entsprechen. Um aber zu bewirken, dass diese Werthe von x und z zusammengehören, ist es nur nöthig, zu setzen

$$x-o=a(1-z),\quad x-\omega=c(1-kz)$$
$$x-p=b(1+z),\quad x-\pi=d(1+kz),$$

worin a, b, c, d constante Grössen bedeuten. Allein zur Herstellung der Reduction bedürfen wir nur zweier constanter Grössen. Wir können daher auch je zwei der obigen Gleichungen durch Division zu einer einzigen vereinigen und erhalten dann $\frac{a}{b}=O$, $\frac{c}{d}=P$ gesetzt,

$$(13) \quad \ldots \quad \frac{x-o}{x-p}=O\,\frac{1-z}{1+z},\quad \frac{x-\omega}{x-\pi}=P\,\frac{1-kz}{1+kz},$$

worin O, P, k zu bestimmen sind. Diese Bestimmung ergiebt sich, wenn man in diesen Gleichungen für x die Werthe o, p, ω, π und für z die ihnen entsprechenden Werthe $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ substituirt. Dadurch erhält man

$$\frac{\omega-o}{\omega-p}=-O\,\frac{1-k}{1+k}\qquad \frac{o-\omega}{o-\pi}=P\,\frac{1-k}{1+k}$$
$$\frac{\pi-o}{\pi-p}=-O\,\frac{1+k}{1-k}\qquad \frac{p-\omega}{p-\pi}=P\,\frac{1+k}{1-k}$$

und daraus durch Multiplication

$$(14) \quad \ldots \quad O^2=\frac{(\omega-o)\,(\pi-o)}{(\omega-p)\,(\pi-p)}\qquad P^2=\frac{(o-\omega)\,(p-\omega)}{(o-\pi)\,(p-\pi)}$$

und durch Division

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2=\frac{(o-\omega)\,(p-\pi)}{(o-\pi)\,(p-\omega)}.$$

Es ist zu bemerken, dass die letzteren drei Ausdrücke dieselben Factoren, nur in verschiedener Anordnung, enthalten, wie die Grösse W des vorigen §, dass sie also auch in denselben Fällen positiv werden, wie jene. Da wir nun Sorge getragen haben, dass o, p und ω, π je zwei auf einander folgende Wurzeln sind, so werden O^2, P^2 $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$ positiv, und damit die Transformation reell.

Da sich nur die Quadrate der Grössen O, P. $\frac{1-k}{1+k}$ ergeben haben, so müssen wir über das Zeichen derselben eine Entscheidung treffen. Nun ist aber $\frac{1-k}{1+k}$ positiv oder negativ, je nachdem k kleiner oder grösser als 1 ist,*) um daher k als einen echten Bruch zu erhalten, muss man den positiven Werth der Quadratwurzel nehmen und setzen

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(o-\omega)\,(p-\pi)}{(o-\pi)\,(p-\omega)}}.$$

Differentirt man ferner die Gleichungen (13), so erhält man

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{cases} (o-p)\,\dfrac{dx}{(x-p)^2} = -2\,O\,\dfrac{dz}{(1+z)^2} \\ (\omega-\pi)\,\dfrac{dx}{(x-\pi)^2} = -2\,P\,\dfrac{kdz}{(1+kz)^2}, \end{cases}$$

oder

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2O}{o-p}\cdot\frac{(x-p)^2}{(1+z)^2} = -\frac{2P}{\omega-\pi}\cdot\frac{k(x-\pi)^2}{(1+kz)^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Verhältnisse

$$\frac{O}{o-p}, \quad \frac{P}{\omega-\pi}$$

immer dasselbe Zeichen haben müssen, und dass sie negativ zu nehmen sind, wenn x und z gleichzeitig abnehmen, dagegen positiv, wenn z abnimmt, während x wächst. Hienach ist das Zeichen von O und P zu bestimmen.

---

*) Man bemerke, dass die Werthe (12) ihre Aufeinanderfolge nicht ändern, wenn k grösser als 1 ist, wofern man den Durchgang durch das Unendliche berücksichtigt, was in dieser ganzen Betrachtung stets geschieht; sobald aber k negativ ist, hören o, p und ω, π auf, aufeinanderfolgende Wurzeln zu sein, und dann würde O^2, P^2, $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$ negativ werden.

Dividirt man nun die Gleichungen (13) und (16) durch einander, so erhält man

$$\frac{(o-p)\,dx}{(x-o)\,(x-p)} = -\frac{2dz}{1-z^2};\quad \frac{(\omega-\pi)\,dx}{(x-\omega)\,(x-\pi)} = -\frac{2kdz}{1-k^2z^2};$$

mithin

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{\sqrt{A(x-o)(x-p)(x-\omega)(x-\pi)}} = \\ \pm\dfrac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(o-p)(\omega-\pi)}}\cdot\dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \end{cases}$$

worin das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem x und z gleichzeitig abnehmen, oder x wächst, während z abnimmt.

Wir haben nun zu zeigen, dass es möglich ist, die vorstehende Transformation so einzurichten, dass z immer kleiner als 1 wird. Dazu müssen wir auf das Intervall Rücksicht nehmen, welches die Variable x bei der Integration durchläuft. Es seien, der Grösse nach geordnet,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

die vier Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$, sodass

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta$$

und

$$R^2 = AR'^2 = A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta).$$

Dann werden sämmtliche Werthe, die x überhaupt annehmen kann, durch die vier Wurzeln in vier Intervalle getheilt, nämlich in die Intervalle

1) $\alpha \ldots\ldots \beta$
2) $\beta \ldots\ldots \gamma$
3) $\gamma \ldots\ldots \delta$
4) $\delta \ldots \mp\infty \ldots \alpha$,

und es ist klar, dass R'^2 negativ ist, wenn x im 1sten und 3ten, und positiv, wenn x im 2ten und 4ten Intervalle liegt, d. h.

R'^2 negativ, wenn 1) $\alpha > x > \beta$, 3) $\gamma > x > \delta$
R'^2 positiv, wenn 2) $\beta > x > \gamma$, 4) $x > \delta$ oder $\alpha > x$.

Wenn also x aus einem zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln liegenden Intervalle in das nächst folgende hinübergeht, so wechselt R'^2 das Zeichen. Daraus folgt: wenn das gegebene elliptische Integral überhaupt ein reelles ist, so werden die Grenzen der Integration in einem und demselben Intervalle zwischen

zwei auf einander folgenden Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ liegen, und ist dieses Intervall das 1ste oder 3te, so wird die Constante A negativ sein. Hätte man es aber mit einem imaginären Integrale zu thun, so dass x mehrere Intervalle durchlaufen könnte, so würde man das Integral in mehrere Theile zerlegen können, in der Art, dass die Grenzen jedes einzelnen Integrals ein Intervall nicht überschreiten. Wäre z. B. das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}}$$

gegeben, bei welchem A negativ und

$$\alpha > x_0 > \beta, \qquad \beta > x_1 > \gamma$$

sei, so würde man haben

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}} = \int_{x_0}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{AR'^2}} - i \int_{\beta}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-AR'^2}}.$$

In jedem Falle hat man es, sei es von vorne herein, sei es durch Zerlegung, nur mit Integralen zu thun, deren beide Grenzen sich in einem und demselben von zwei auf einander folgenden Wurzeln begrenzten Intervalle befinden.

Nun waren bei der Reduction o und p als diejenigen Werthe von x angenommen, welche den Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen. Wenn daher x während der Integration zwischen o und p liegt, so wird auch z nicht über die Werthe $+1$ und -1 hinausgehen. Hienach hat man, um zu bewirken, dass z nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als -1 werde, nur nöthig, in den obigen Formeln für o und p diejenigen Wurzeln zu setzen, zwischen welchen die Grenzen des gegebenen oder dem Obigen gemäss in seine Theile zerlegten Integrals liegen. Es fragt sich alsdann noch, welche Wurzeln man für ω und π zu setzen habe. Dies ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Die Wurzeln o, p, ω, π waren diejenigen Werthe von x, welche resp. den Werthen $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ von z entsprechen. Ordnet man diese unter der Voraussetzung, dass $k < 1$ ist, der Grösse nach, so hat man entweder die wachsende Reihefolge der Werthe von z

$$-\frac{1}{k}, \; -1, \; +1, \; +\frac{1}{k},$$

entsprechend den Werthen von x

$$\pi, \; p, \; o, \; \omega,$$

oder die abnehmende Reihenfolge der z-Werthe

$$+\frac{1}{k}, \; +1, \; -1, \; -\frac{1}{k},$$

entsprechend den x-Werthen

$$\omega, \; o, \; p, \; \pi.$$

Während daher x alle Werthe abnehmend durchläuft und nach und nach die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ annimmt, durchläuft z entweder abnehmend oder zunehmend die eben genannten Werthe. Man denke sich nun dieses Abnehmen oder Wachsen ohne Aufhören durch $\pm\infty$ oder $\mp\infty$ hindurch; dann kann man die Werthe auch cyclisch mit einander vertauschen, ohne die Reihenfolge zu ändern. Da man nun jedesmal diejenigen zwei der Werthe α, β, γ, δ, zwischen welchen die Grenzen des Integrals liegen, den Werthen o und p von x gleich zu setzen hat, indem die letzteren den Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen, so ergiebt die Reihenfolge jedesmal, welche der Werthe α, β, γ, δ man den Werthen ω und π gleich zu setzen hat. Dabei ergeben sich jedesmal zwei Substitutionsformeln, indem man entweder x und z gleichzeitig abnehmen oder aber bei abnehmendem x das z wachsen lassen kann. Ein Beispiel möge zunächst das Vorige erläutern. Es mögen die Grenzen der Integration zwischen α und β liegen, also $\alpha > x > \beta$, und x und z sollen gleichzeitig abnehmen. Dann entsprechen einander folgende Werthe von z und x

$$\begin{array}{llllll} z \ldots\ldots & +\frac{1}{k}, & +1, & -1, & -\frac{1}{k} \\ x \ldots\ldots & \omega, & o, & p, & \pi. \end{array}$$

Nun sind α und β die Grenzen des Intervalls, in welchem sich x befindet, also hat man diese den Werthen o und p gleich zu setzen, und zwar, weil x von o nach p abnehmend angenommen wird, und auch von α nach β ein Abnehmen statt findet,

$$o = \alpha \quad \text{und} \quad p = \beta$$

zu setzen. Nun folgt auf p die Wurzel π, und auf β die Wurzel γ, also ist

$$\pi = \gamma;$$

endlich folgt ω auf π (wenn $\omega > \pi$ ist durch $\mp\infty$ hindurch) und δ auf γ, also hat man zuletzt

$$\omega = \delta$$

zu setzen. In ähnlicher Weise kann man in allen übrigen Fällen verfahren; das folgende Schema giebt an, welches die in jedem Falle einander entsprechenden Werthe sind:

x und z nehmen gleichzeitig ab

	$z \ldots\ldots + \frac{1}{k}$,	$+\ 1$,	$-\ 1$,	$-\ \frac{1}{k}$
	$x \ldots\ldots\ \omega$,	o,	p,	π
$\alpha > x > \beta$	δ,	α,	β,	γ
$\beta > x > \gamma$	α,	β,	γ,	δ
$\gamma > x > \delta$	β,	γ,	δ,	α
$\delta > x$ od. $x > \alpha$	γ,	δ,	α,	β

z wächst bei abnehmendem x

	$z \ldots\ldots - \frac{1}{k}$,	$-\ 1$,	$+\ 1$,	$+\ \frac{1}{k}$
	$x \ldots\ldots\ \pi$,	p,	o,	ω
$\alpha > x > \beta$	δ,	α,	β,	γ
$\beta > x > \gamma$	α,	β,	γ,	δ
$\gamma > x > \delta$	β,	γ,	δ,	α
$\delta > x$ od. $x > \alpha$	γ,	δ,	α,	β.

Für jedes der Intervalle, in welchem x liegen kann, erhält man so zwei Reductionsformeln, bei welchen sowohl z als auch k echte Brüche werden, und zwar so, dass bei der einen x und z gleichzeitig wachsen und abnehmen, bei der andern dagegen z wächst, wenn x abnimmt und umgekehrt.

Die vollständigen Formeln nun für jeden Fall aufzustellen, hätte keine Schwierigkeit. Es scheint aber bequemer zu sein, in jedem vorkommenden Falle nach dem obigen Schema die für o, p, ω, π zu setzenden Werthe aufzusuchen und dann die Formeln (13), (14), (15) und (17) anzuwenden. Nur ein Beispiel diene zur Erläuterung.

Es sei $\gamma > x > \delta$, also A bei reellem Integral negativ, und z wachse bei abnehmendem x. Dann entsprechen einander folgende Werthe:

$$z \ldots\ldots -\frac{1}{k},\quad -1,\quad +1,\quad +\frac{1}{k}$$

$$x \ldots\ldots \begin{cases} \pi, & p, \quad o, \quad \omega \\ \beta, & \gamma, \quad \delta, \quad \alpha. \end{cases}$$

Also giebt zuerst die Formel (15)

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)}};$$

ferner erhält man aus (14)

$$O = -\sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}},$$

und zwar ist O negativ zu nehmen, weil

$$\frac{O}{o-p} = \frac{O}{\delta-\gamma}$$

positiv werden muss; dann folgt aus (13)

$$\frac{x-\delta}{x-\gamma} = O\,\frac{1-z}{1+z}$$

und endlich aus (17)

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(\delta-\gamma)(\alpha-\beta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo das Minus-Zeichen zu setzen ist, weil z bei wachsendem x abnimmt. Weil A negativ ist, so wird die rechte Seite dieses Ausdrucks reell, da auch $\delta-\gamma$ negativ wird.

Ueber die Bestimmung des Zeichens der Grösse O sei noch folgende Bemerkung erlaubt. Dieses Zeichen ist, wie oben bemerkt, so zu wählen, dass

$$\frac{O}{o-p}$$

negativ wird, wenn x und z gleichzeitig abnehmen, im entgegengesetzten Falle positiv. Nun entsprechen einander die Werthe

$$\begin{array}{lcccc} z \ldots\ldots & +\frac{1}{k}, & +1, & -1, & -\frac{1}{k} \\ x \ldots\ldots & \omega, & o, & p, & \pi. \end{array}$$

Wenn daher x und z gleichzeitig abnehmen, so ist mit einer sogleich anzuführenden Ausnahme, $o > p$, mithin O negativ zu nehmen. Wächst aber x bei abnehmendem z, so ist mit Ausschluss desselben Ausnahmefalles $o < p$, also O wiederum negativ zu nehmen. Die Ausnahme aber tritt dann ein, wenn die Zu- oder Abnahme von o nach p durch das Unendliche hindurch geschieht, wenn also o und p die grösste α und die kleinste δ der Wurzeln sind, d. h. wenn die Grenzen des zu transformirenden Integrals beide entweder $\geqq \alpha$ oder $\leqq \delta$ sind. Alsdann ist $o-p$

bei gleichzeitiger Abnahme von x und z negativ, im entgegengesetzten Falle positiv, dann also ist O positiv zu nehmen. Hieraus ergiebt sich die Regel: Liegen die Grenzen des auf die Normalform zu reducirenden Integrals in einem der drei ersten Intervalle 1) $\alpha \ldots \beta$, 2) $\beta \ldots \gamma$, 3) $\gamma \ldots \delta$, so ist O negativ; liegen die Grenzen aber in dem vierten Intervalle 4) $\delta \ldots \mp \infty \ldots \alpha$, so ist O positiv.

Stellt man die Reductionsformeln nun noch einmal zusammen, so sind sie folgende:

(17 a.)

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(o-\omega)(p-\pi)}{(o-\pi)(p-\omega)}} \qquad (15)$$

$$\frac{x-o}{x-p} = \mp\sqrt{\frac{(o-\omega)(o-\pi)}{(p-\omega)(p-\pi)}} \cdot \frac{1-z}{1+z}; \qquad (13), (14)$$

— wenn x in einem der drei ersten Intervalle liegt,
+ wenn x im vierten Intervalle liegt.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{\sqrt{A(x-o)(x-p)(x-\omega)(x-\pi)}} = \\ \pm \dfrac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(o-p)(\omega-\pi)}} \cdot \dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \end{array}\right\} \quad (17)$$

+ wenn x und z gleichzeitig abnehmen,
— wenn x wächst bei abnehmendem z.

§ 14.

Wir gehen nun zur Betrachtung des Falles über, dass die Grösse R^2 nur vom dritten Grade ist. Es wurde schon § 11 erwähnt, dass man dies als einen speciellen Fall betrachten kann, der sich durch Specification der vorigen Betrachtung erledigen lässt. Dies beruht auf dem bekannten Satze, dass, wenn eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades durch das Verschwinden der Coefficienten der m höchsten Potenzen der Unbekannten auf den $(n-m)^{\text{ten}}$ Grad reducirt wird, m ihrer Wurzeln unendlich gross geworden sind. Ist nun die Gleichung $R^2 = o$ nur vom dritten Grade, so kann man sie als eine Gleichung vierten Grades betrachten, deren eine Wurzel unendlich ist; man wird daher auch die zugehörigen Reductionsformeln aus den vorigen ableiten können, wenn man eine der Wurzeln unendlich gross setzt, und zwar, was gleichgültig ist, entweder die grösste $= +\infty$ oder die kleinste $= -\infty$. Es seien α, β, γ die drei reellen Wurzeln der Gleichung dritten Grades $R^2 = o$, und wir nehmen $\delta = -\infty$

an; dann sind die Intervalle für die Grenzen der Integrale 1) $\alpha \ldots \beta$, 2) $\beta \ldots \gamma$, 3) $\gamma \ldots -\infty$, 4) $+\infty \ldots \alpha$. Im Uebrigen bleiben die im vorigen § gegebenen Vorschriften bestehen, nur ist überall $\delta = \infty$ zu setzen. Den Einfluss davon wird man am besten an dem im vorigen § gegebenen Beispiele übersehen können. Dividirt man nämlich in den betreffenden Formeln unter den Wurzelzeichen entweder im Zähler und Nenner oder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit δ oder δ^2 und setzt dann $\delta = \infty$, so werden die Verhältnisse je zweier, δ enthaltender, Factoren gleich 1, und die Wirkung des Unendlichwerdens von δ ist daher einfach die, dass man alle Factoren, welche δ enthalten, fortzulassen hat. Auf diese Weise ergeben sich folgende Reductionsformeln:

Es ist $\gamma > x > -\infty$, und x nimmt mit wachsendem z ab. Man erhält

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}; \quad \frac{1}{x-\gamma} = -\sqrt{\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}} \cdot \frac{1-z}{1+z}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-A(\alpha-\beta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

§ 15.

Es soll nun zunächst die im Vorigen auseinander gesetzte Methode an einem Beispiele erläutert werden, und zwar stellen wir uns die Aufgabe, das elliptische Integral, das bei der Bewegung des Pendels die Zeit bestimmt, nämlich das Integral (5) § 6

$$(18) \qquad t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}}$$

auf die Normalform zu reduciren. Dasselbe kann zuerst auf verschiedene Weise in algebraischer Form dargestellt werden. Die scheinbar einfachste Art, die aber bei einer Transformation der ersten Ordnung nicht die einfachste Reduction liefert, entsteht, wenn man

$$\cos\psi = x$$

setzt, wodurch man, wenn zugleich der Kürze wegen

$$\cos\alpha = a$$

gesetzt wird,

$$(19)\qquad t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}}$$

erhält. Wie man sieht, ist alsdann das Radical R^2 vom 3ten Grade und zwar zerlegt es sich von selbst in 3 lineare Factoren, indem die Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ der Grösse nach geordnet die folgenden

$$+1,\ +a,\ -1$$

sind. Der Winkel α bedeutet den grössten Werth, den der Winkel ψ annehmen kann, $\cos\psi$ oder x kann daher nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als a werden, wodurch es sich bestätigt, dass x nur in dem Intervall zwischen den beiden auf einander folgenden Wurzeln $+1$ und a liegt.

Für die Wurzeln o und p haben wir daher in den Formeln des § 13. 1 und a zu setzen, und zwar entweder in dieser oder in umgekehrter Ordnung, je nachdem wir annehmen wollen, dass z und x gleichzeitig wachsen oder nicht. Da aber in (19) x abnimmt, wenn t wächst, so wollen wir, damit t und z gleichzeitig wachsen, diejenige Reduction wählen, bei welcher z abnimmt, wenn x wächst. Da ferner die Werthe

$$\begin{array}{lllll} z \ldots\ldots & +\frac{1}{k}, & +1, & -1, & -\frac{1}{k} \\ x \ldots\ldots & \omega, & o, & p, & \pi \end{array}$$

einander entsprechen müssen, so müssen wir statt der Werthe

$$\begin{array}{lllll} & \omega, & o, & p, & \pi \\ \text{resp.} & -1, & +a, & +1, & \infty \end{array}$$

setzen. Alsdann giebt zuerst die Formel (15)

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

woraus

$$k = \frac{1-\cos\frac{1}{2}\alpha}{1+\cos\frac{1}{2}\alpha} = \mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{4}\alpha$$

folgt. Ferner folgt aus (13) und (14)

$$\frac{x-a}{x-1} = -\sqrt{\frac{1+a}{2}}\cdot\frac{1-z}{1+z}$$

und aus (17)

$$\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}} = -\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{1-a}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

4*

Setzt man hierin noch $z = \sin\varphi$ und drückt a und x durch α und ψ aus, so erhält man die vollständigen Reductionsformeln, die aber von den in § 6 gegebenen verschieden und nicht so einfach wie diese sind.

Zu diesen einfacheren gelangt man, wenn man nicht $\cos\psi$, sondern $\sin\frac{1}{2}\psi$ in (18) als neue Variable einführt. Denn da

$$\cos\psi - \cos\alpha = 2(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\psi)$$

ist, so wird, wenn man

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = x \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = c$$

setzt, das elliptische Integral (18)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c^2-x^2)}},$$

oder wenn man das Radical in seine linearen Factoren zerfällt und dieselben nach der Grösse der Wurzeln, deren Reihenfolge $+1;\ +c,\ -c,\ -1$ ist, ordnet,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c)(x+c)(x+1)}}.$$

Der Winkel ψ liegt während der ganzen Bewegung zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$, daher x wiederum zwischen den auf einander folgenden Wurzeln $+c$ und $-c$. Diese sind es daher, die wir an die Stelle von o und p zu setzen haben und zwar auch in dieser Reihenfolge, wenn wir bewirken wollen, dass t, x und z gleichzeitig wachsen. Demnach hat man für

$$\omega, \quad o, \quad p, \quad \pi$$

resp.

$$+1, \ +c, \ -c, \ -1$$

zu setzen und erhält aus den Formeln (17 a)

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(c-1)(1-c)}{(c+1)(-c-1)}} = \frac{1-c}{1+c}, \quad k = c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{x-c}{x+c} = -\sqrt{\frac{(c-1)(c+1)}{(-c-1)(1-c)}}\,\frac{1-z}{1+z} = \frac{z-1}{z+1},$$

woraus

$$x = cz \quad \text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\varphi;$$

endlich wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-c)(x+c)(x+1)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2c\,.\,2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
$$= \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

woraus, wie oben,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{u} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

folgt.

Wir schliessen hieran gleich die Betrachtung des ganz herumschwingenden Pendels, besonders weil dabei recht deutlich wird, wie die Reduction des elliptischen Integrals auf die Normalform wesentlich von den Grenzen, zwischen denen die Variable zu nehmen ist, abhängt.

Wir haben § 5 gesehen, dass, wenn man mit v die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, welche das Pendel zur Zeit $t = o$, d. h. in dem Augenblicke, wo es durch die Verticallinie hindurchgeht, besitzt,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{lv^2}{2g}$$

ist, und dass der Winkel α zu existiren aufhört, und das Pendel ein ganz herumschwingendes wird, wenn

$$lv^2 > 4g$$

ist. Nun folgt

$$c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{lv^2}{4g}}.$$

In dem vorliegenden Falle ist also $c > 1$. Wollte man nun die vorige Reduction ohne Weiteres auch hier anwenden, so würde der Modul $k = c$ nicht mehr ein echter Bruch sein. In der That ist aber hier eine andere Reduction nothwendig, weil die Grenzen der Veränderlichen andere geworden sind. Ordnet man die Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ wiederum ihrer Grösse nach, so sind sie

$$+c,\ +1,\ -1,\ -c,$$

und jetzt liegt $x = \sin\frac{1}{2}\psi$ nicht mehr zwischen $+c$ und $-c$ sondern zwischen $+1$ und -1. Man hat daher für

$$\omega,\quad o,\quad p,\quad \pi$$

resp.

$$+c,\ +1,\ -1,\ -c$$

zu setzen. Mit diesen Werthen erhält man dann

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(1-c)(c-1)}{(1+c)(-1-c)}} = \frac{c-1}{c+1},$$

weil der positive Werth der Wurzel genommen werden muss, und $c > 1$ ist, woraus

$$k = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{4g}{lv^2}}$$

folgt. Ferner wird, weil nun $o = +1$, $p = -1$ zu setzen ist,

$$\frac{x-1}{x+1} = -\sqrt{\frac{(1-c)(1+c)}{(-1-c)(-1+c)}}\ \frac{1-z}{1+z} = \frac{z-1}{z+1},$$

woraus
$$x = z \quad \text{oder} \quad \psi = 2\varphi$$

folgt. Endlich ist

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-c)(x-1)(x+1)(x+c)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2.2c}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
$$= k \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{v} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Bei dem ganz herumschwingenden Pendel lässt sich hienach der Winkel ψ selbst durch die Amplitude des Integrals ausdrücken. Nämlich da

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{vt}{2}$$

ist, so hat man

$$\varphi = am\,\frac{vt}{2} \text{ und daher } \psi = 2\,am\,\frac{vt}{2}\ \left(\text{mod. } \sqrt{\frac{4g}{lv^2}}\right),$$

und damit bestätigt sich, dass der Winkel ψ fortwährend wächst, da die Amplitude für reelle Werthe des Arguments eine stets wachsende Function ist. (§ 7.) Es wird sich später zeigen, dass auch die Function Amplitudo in eine stark convergirende Reihe entwickelt werden, und daher auch für jeden Werth des Arguments und des Moduls berechnet werden kann. Da nach § 4

$$\frac{d\,am\,u}{du} = \Delta\,am\,u$$

ist, so erhält man auch die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\psi}{dt} = v\,\Delta\,am\,\frac{vt}{2}.$$

§ 16.

Wir gehen nun zu dem zweiten Falle über, in welchem die Gleichung $R^2 = o$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat.

Wir haben § 12 gesehen, dass in diesem Falle der Ausdruck $\frac{dx}{R}$ auf die Form

$$C \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)}}$$

gebracht werden kann. Man kann nun diesen Fall kürzer erledigen und aus dem ersten Falle herleiten, wenn man k imaginär annimmt und

$$k = i\lambda$$

setzt. Wir wollen annehmen, es seien ω und π die beiden conjugirten imaginären Wurzeln. Setzt man

$$\omega = \mu + i\nu, \qquad \pi = \mu - i\nu,$$

so wird

$$R^2 = A(x-o)(x-p)[(x-\mu)^2 + \nu^2],$$

sodass μ dieselbe Bedeutung, wie im § 12 hat, an Stelle von ν aber ν^2 zu setzen ist, was zweckmässig erscheint, da diese Grösse hier positiv ist. Man erhält nun zunächst aus (13) und (14)

$$\begin{aligned}\frac{x-o}{x-p} &= \mp \sqrt{\frac{(o-\mu-i\nu)(o-\mu+i\nu)}{(p-\mu-i\nu)(p-\mu+i\nu)}} \, \frac{1-z}{1+z} \\ &= \mp \sqrt{\frac{(o-\mu)^2+\nu^2}{(p-\mu)^2+\nu^2}} \, \frac{1-z}{1+z}.\end{aligned}$$

Ueber das Zeichen gilt dieselbe Regel wie früher, nämlich wachsen x und z gleichzeitig, so erhält dieser Ausdruck das entgegengesetzte Zeichen wie $o - p$, im umgekehrten Falle dasselbe Zeichen. Ferner erhält man aus (17)

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{\sqrt{A(x-o)(x-p)[(x-\mu)^2+\nu^2]}} = \\ &\pm \frac{2\sqrt{i\lambda}}{\sqrt{A\,2i\nu\,(o-p)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)}},\end{aligned}$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem z und x zugleich wachsen oder nicht. Hierin ist nach § 12 $z = \cos\varphi$ und

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = k^2$$

zu setzen, dann erhält man

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{\sqrt{A(x-o)(x-p)[(x-\mu)^2+\nu^2]}} = \\ \mp \sqrt{\dfrac{2\lambda}{A(1+\lambda^2)\,\nu\,(o-p)}} \cdot \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Um endlich den Modul zu bestimmen, zieht man zuerst aus (15) die Gleichung

$$\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = \pm \sqrt{\frac{(o-\mu-i\nu)(p-\mu+i\nu)}{(o-\mu+i\nu)(p-\mu-i\nu)}},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(o-\mu)(p-\mu)+\nu^2 = u, \quad \nu(o-p) = v$$

setzt,

$$(21) \qquad \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = \pm \sqrt{\frac{u+iv}{u-iv}}.$$

Hier muss bei der Bestimmung des Zeichens zugleich auf die Grösse A Rücksicht genommen und dasselbe so gewählt werden, dass der in (20) enthaltene Ausdruck

$$\frac{2\lambda}{A(1+\lambda^2)\,\nu(o-p)}$$

positiv wird. Multiplicirt man in (21) Zähler und Nenner links mit $1-i\lambda$ und rechts mit $\sqrt{u+iv}$ so erhält man

$$\frac{1-\lambda^2-2\lambda i}{1+\lambda^2} = \pm \frac{u+vi}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

und daraus

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \mp \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Da nun $v = \nu(o-p)$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{2\lambda}{(1+\lambda^2)\nu(o-p)} = \mp \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

und dieser Ausdruck muss daher dasselbe Zeichen wie A erhalten, d. h. das obere, wenn A negativ ist, das untere, wenn A positiv ist. Ferner erhält man

$$\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\sqrt{u^2+v^2} \mp u}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

also

$$k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\sqrt{u^2+v^2} \mp u}{2\sqrt{u^2+v^2}},$$

worin, weil hier das obere und untere Zeichen dem oberen und unteren Zeichen des vorigen Ausdrucks entsprechen muss, ebenfalls dasjenige Zeichen zu wählen ist, welches der Grösse A zu kommt.

Es war hier $z = \cos\varphi$ gesetzt, also muss dafür gesorgt werden, dass z ein echter Bruch bleibt. Da nun der Ausdruck $(1-z^2)(1+\lambda^2 z^2)$ für die Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{i\lambda}$, $-\frac{1}{i\lambda}$ ver-

schwindet, so sind auch hier o und p diejenigen Werthe von x, welche den reellen Werthen $+1$ und -1 von z entsprechen. Nennt man aber a die grössere und b die kleinere der beiden reellen Wurzeln, so wird das Gebiet von $+\infty$ bis $-\infty$ in die beiden Intervalle

$$a \dots b \quad \text{und} \quad b \dots \mp\infty \dots a$$

getheilt, welche von den Grenzen eines Integrals nicht überschritten werden, wenn dasselbe reell ist. Um nun zu bewirken, dass z zwischen $+1$ und -1 liege, hat man wie früher nur nöthig, die Substitution so einzurichten, dass x von o nach p fortschreitet, während z von $+1$ nach -1 geht.

Ist also 1) $a > x > b$, so muss man, wenn x und z gleichzeitig abnehmen sollen, setzen:

$$o = a, \quad p = b;$$

soll aber x wachsen, während z abnimmt, umgekehrt

$$o = b, \quad p = a.$$

Ist 2) $x > a$ oder $< b$, so hat man in dem Falle der gleichzeitigen Abnahme von x und z

$$o = b, \quad p = a$$

zu setzen, weil alsdann x von b unaufhörlich abnehmend und durch $\mp\infty$ nach a fortschreitend gedacht werden muss. Wächst dagegen x bei abnehmendem z, so hat man umgekehrt

$$o = a, \quad p = b$$

zu setzen.

Der Fall, dass das Radical vom dritten Grade ist und eine reelle Wurzel besitzt, erledigt sich wieder leicht dadurch, dass man wie im Vorigen eine Wurzel unendlich setzt.

Der Fall zweier reeller und zweier imaginärer Wurzeln tritt bei der Rectification der Lemniscate ein. Die Gleichung dieser Curve, bezogen auf diejenigen rechtwinkligen Axen, welche sie in vier congruente Theile theilen, lautet, wenn mit a die halbe Axe bezeichnet wird,

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = o.$$

Noch einfacher wird sie, wenn man Polarcoordinaten einführt und

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi$$

setzt. Dann verwandelt sie sich in

$$(22) \quad r^2 - a^2(\cos^2\psi - \sin^2\psi) = o \quad \text{oder} \quad r = \pm a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

Nun ist, wenn ds das Differential des Bogens bezeichnet,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2.$$

Aus (22) aber folgt

$$dr = \mp \frac{a.\sin 2\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} d\psi; \qquad \frac{d\psi}{dr} = \mp \frac{r}{a^2\sqrt{1-\frac{r^4}{a^4}}}$$

$$ds = \pm \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^4}{a^4}}}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{r}{a} = z,$$

so ist z, da r nicht grösser als a werden kann, ein echter Bruch, und man erhält

$$ds = \pm \frac{a dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Hier hat das elliptische Integral schon von selbst die gewünschte Form, denn es schreibt sich sogleich

$$ds = \pm \frac{a\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+z^2)}}.$$

Daher ist $\lambda^2 = 1$ und folglich $k^2 = \frac{1}{2}$. Mithin erhält man durch $z = \cos\varphi$

$$ds = \mp a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Dieses Integral mit dem speciellen Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ des Moduls k ist dadurch historisch merkwürdig, dass an ihm die ersten Entdeckungen über elliptische Integrale gemacht worden sind.

Um auch noch kurz des 3ten Falles, in welchem alle 4 linearen Factoren des Radicals R imaginär sind, Erwähnung zu thun, so haben wir diesen Fall schon im § 12 abgemacht. Es erhellt nun aber auch, dass der Umstand, dass hier das Gebiet der Werthe von x nicht durch das Vorhandensein reeller Werthe, für welche R verschwindet, in Intervalle getheilt wird, mit der Substitution $\operatorname{tg}\varphi = z$, welche der Grösse z alle möglichen Werthe anzunehmen erlaubt, ganz im Einklange ist.

Vierter Abschnitt.

Von den drei Gattungen elliptischer Integrale.

§ 17.

Wir haben uns im Vorigen lediglich mit der Reduction des Integrals

$$\int \frac{dx}{R},$$

in welchem R die Quadratwurzel aus einem Ausdruck des vierten oder dritten Grades bedeutet, beschäftigt, und es ist gezeigt worden, dass man immer ein solches Integral auf die Form

$$C\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

bringen kann, worin C eine Constante und k einen echten Bruch bezeichnet. Die dabei anzuwendende Substitution war stets von der Form

$$x = \frac{a+bz}{c+dz},$$

wenn a, b, c, d constante Grössen bezeichnen, und für z hatte man in den drei Fällen, dass die Gleichung $R^2 = o$ vier oder zwei oder keine reellen Wurzeln hat, resp. $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ zu setzen, sodass die Substitutionsformeln in den drei erwähnten Fällen resp. von den Formen

$$(23) \quad . \quad . \quad x = \frac{a+b\sin\varphi}{c+d\sin\varphi}, \quad x = \frac{a+b\cos\varphi}{c+d\cos\varphi}, \quad x = \frac{a+b\operatorname{tg}\varphi}{c+d\operatorname{tg}\varphi}$$

sind.

Wir gehen nun zu der Betrachtung derjenigen elliptischen Integrale über, welche im Zähler noch mit einer rationalen Function von x behaftet sind, welches, wie § 11 gezeigt worden ist, die allgemeinste Form ist, auf welche die elliptischen Integrale stets reducirt werden können, nämlich die Form

$$\int \frac{F(x)\,dx}{R},$$

wo $F(x)$ eine algebraische rationale Function bezeichnet. Indem man die Substitutionen (23) anwendet, geht in den drei Fällen

der Beschaffenheit von R das obige Integral in eine der Formen

$$(24)\qquad \int\frac{f(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int\frac{f(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int\frac{f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

über, und es ist klar, da die Substitutionen (23) linear sind, dass die in den Zählern vorkommenden Functionen f wiederum rational sein werden.

Es soll nun zuerst gezeigt werden, dass, wenn diese Functionen f ungerade Functionen sind, die vorstehenden Integrale aufhören, elliptische zu sein, und auf Logarithmen, cyclometrische oder algebraische Functionen führen. Eine ungerade rationale Function hat nämlich die Eigenschaft, dass sie gleich dem Product aus einer geraden rationalen Function in die Variable ist; eine gerade rationale Function aber ist stets eine rationale Function des Quadrats der Variablen. Bedeutet daher f eine ungerade und F eine beliebige rationale Function, so hat man

$$f(u) = u\,.\,F(u^2).$$

In diesem Falle nehmen also die drei Integrale (24) die Formen

$$\int\frac{\sin\varphi\,F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int\frac{\cos\varphi\,F(\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int\frac{\operatorname{tg}\varphi\,F(\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

an. Setzt man nun in denselben

$$\sin^2\varphi = z,$$

wodurch

$$\cos^2\varphi = 1-z,\quad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{z}{1-z},\quad d\varphi = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}$$

wird, so erhält man

$$\frac{\sin\varphi\,F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{z}\,F(z)\,dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F(z)\,dz}{2\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}$$

$$\frac{\cos\varphi\,F(\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-z}\,F(1-z)\,dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F(1-z)\,dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi\,F(\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,F\left(\frac{z}{1-z}\right)dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{F\left(\frac{z}{1-z}\right)dz}{2(1-z)\sqrt{1-k^2z}}.$$

In keinem dieser Integrale übersteigt nun die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen den zweiten Grad, sie führen daher sämmtlich entweder auf algebraische oder cyclometrische Functionen oder Logarithmen und sind nicht elliptische Integrale.

Bedeutet ferner in den Integralen (24) f eine beliebige rationale Function, so kann man dieselbe immer in eine gerade

und eine ungerade Function zerlegen. Denn man hat, was auch f sein möge, immer die identische Gleichung

$$f(u) = \tfrac{1}{2}[f(u) + f(-u)] + \tfrac{1}{2}[f(u) - f(-u)].$$

Die Function $f(u) + f(-u)$ ist aber eine gerade Function, da sie ungeändert bleibt, wenn man $-u$ statt u setzt, und ebenso $f(u) - f(-u)$ eine ungerade Function, da sie den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn $-u$ statt u gesetzt wird. Hieraus geht nun hervor, dass die Integrale (24) sich im Allgemeinen in zwei Theile zerlegen, von denen der eine kein elliptisches Integral ist. Nach Absonderung dieses Theiles haben wir es daher nur noch mit Integralen zu thun, welche im Zähler eine gerade rationale Function von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tg}\varphi$ enthalten. Wie oben bemerkt, sind aber gerade rationale Functionen stets rationale Functionen des Quadrats der Variablen, daher sind die Integrale, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, wenn F eine beliebige rationale Function bezeichnet, und das Zeichen $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ wieder eingeführt wird, die folgenden:

$$(25) \quad \ldots \quad \int \frac{F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{F(\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{F(\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Da endlich von den Grössen $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\operatorname{tg}^2\varphi$ jede durch irgend eine derselben rational ausgedrückt werden kann, so sind diese drei Formen nicht mehr wesentlich von einander verschieden, sondern können auf einander reducirt werden. Wir knüpfen daher unsere weiteren Betrachtungen an eine derselben an, wozu wir die erste wählen, also das Integral

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int \frac{F(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Eine rationale Function besteht im Allgemeinen aus einer ganzen und einer echt gebrochenen Function; letztere kann wieder in Partialbrüche zerlegt werden; daher kann man sagen, dass die Function $F(\sin^2\varphi)$ aus einem Aggregat von Gliedern von der Form

$$M(m + \sin^2\varphi)^\mu$$

bestehe, worin der Exponent μ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, und die Coefficienten M und m reelle oder imaginäre Constanten sind. Es sei besonders hervorgehoben, dass bei der Zerlegung einer gebrochenen Function in Partialbrüche

mit Nennern von vorstehender Form letztere auch imaginär werden können. Wir werden darauf späterhin Rücksicht zu nehmen haben. Hienach zerlegt sich das Integral (26) in eine Summe von Integralen von der Form

$$M\int\frac{(m+\sin^2\varphi)^\mu\,d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

und es lässt sich nun zeigen, dass jedes Integral von dieser Form sich auf drei Formen zurückführen lässt, die entstehen, wenn entweder

$$\mu = o \text{ oder } \mu = 1 \text{ oder } \mu = -1$$

ist, d. h. auf die drei Formen

$$\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},\quad \int\frac{(m+\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\varDelta\varphi},\quad \int\frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi},$$

welches die von Legendre festgestellten drei Gattungen elliptischer Integrale sind.

Dazu führt eine Reductionsformel, die sich aus der identischen Gleichung

$$(27)\quad . \quad . \quad \begin{cases} (m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\;\cos\varphi\;\varDelta\varphi = \\ \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\,[(m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\,\varDelta\varphi]}{d\varphi}\,d\varphi \end{cases}$$

ergiebt. Führt man hier die Differentiation rechter Hand aus, so erhält man unter dem Integralzeichen folgenden Ausdruck, der in $d\varphi$ multiplicirt ist,

$$2\mu\,(m+\sin^2\varphi)^{\mu-1}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\,\varDelta\varphi +$$
$$(m+\sin^2\varphi)^\mu\left[\cos^2\varphi\,\varDelta\varphi - \sin^2\varphi\,\varDelta\varphi - \frac{k^2\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}{\varDelta\varphi}\right],$$

und multiplicirt man den ganzen Ausdruck mit $\varDelta\varphi$, so erhält man unter dem Integralzeichen als Factor von $\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$ den Ausdruck

$$(28)\ \begin{cases} 2\mu\,(m+\sin^2\varphi)^{\mu-1}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\,\varDelta^2\varphi + \\ (m+\sin^2\varphi)^\mu\,[\cos^2\varphi\,\varDelta^2\varphi - \sin^2\varphi\,\varDelta^2\varphi - k^2\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi]. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$m+\sin^2\varphi = v,$$

wodurch

$$\sin^2\varphi = v-m,\quad \cos^2\varphi = 1 - v + m,\quad \varDelta^2\varphi = 1-k^2v+k^2m$$

wird, und substituirt dies in (28), so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden

$$- 2\mu A . v^{\mu-1} + (2\mu + 1) B . v^{\mu} - (2\mu + 2) C . v^{\mu+1} + (2\mu + 3) k^2 . v^{\mu+2},$$

worin zur Abkürzung

$$A = m (1 + m) (1 + k^2 m)$$
$$B = 1 + 2m + 2k^2 m + 3k^2 m^2$$
$$C = 1 + k^2 + 3k^2 m$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck nun, mit $\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$ multiplicirt und zwischen den Grenzen o und φ integrirt, bildet die rechte Seite der Gleichung (27). Bezeichnet man also mit V_μ das Integral

$$\int_0^\varphi \frac{v^\mu\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{(m + \sin^2\varphi)^\mu\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = V_\mu,$$

so erhält man die gesuchte Reductionsformel

$$(29) \quad (m + \sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi \cos\varphi\, \varDelta\varphi = - 2\mu A V_{\mu-1} + (2\mu + 1) B V_\mu - (2\mu + 2) C V_{\mu+1} + (2\mu + 3) k^2 V_{\mu+2}.$$

Mittelst derselben kann man jedes Integral V_μ mit einem beliebigen Exponenten μ auf die folgenden drei

$$V_0, \quad V_1, \quad \text{und} \quad V_{-1}$$

zurückführen; denn für $\mu = o$ oder $\mu = -1$ erhält man V_2 oder V_{-2} durch diese drei ausgedrückt; für $\mu = 1$ erhält man V_3 ausgedrückt durch V_2, V_1, V_0; aber V_2 war schon durch V_0, V_1, V_{-1} ausgedrückt, also kann man auch V_3 durch die nämlichen drei Integrale ausdrücken. Ebenso erhält man für $\mu = -2$, V_{-3} ausgedrückt durch V_{-2}, V_{-1}, V_0 und also auch durch V_{-1}, V_0, V_1. Fährt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich, dass man für jedes beliebige μ das Integral V_μ durch V_0, V_1, V_{-1} ausdrücken kann.

Zwei ähnliche Reductionsformeln kann man erhalten, wenn man von den beiden anderen der Integrale (25) ausgeht. Dieselben lassen sich auch aus (29) ableiten, wenn man einmal $\cos\psi = \sin\varphi$ und das andere Mal $i \operatorname{tg}\psi = \sin\varphi$ und zugleich $-m' = m$ setzt.

Hiedurch ist nun nachgewiesen, dass man jedes elliptische Integral im allgemeinsten Sinne, d. h. jedes Integral einer rationalen Function der Variablen und einer Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten oder dritten Grades, theils auf algebraische, cyclometrische oder logarithmische Functionen, theils auf eine,

oder zwei, oder alle der drei Gattungen elliptischer Integrale im engeren Sinne

$$(30) \quad . \quad . \quad \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{(m+\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

zurückführen kann. Diese drei Formen sind nun diejenigen, welchen Legendre der Reihe nach die Namen: Elliptisches Integral der ersten, der zweiten und der dritten Gattung gegeben hat.

Wenn in dem Integral (26) die Function F eine ganze Function ist, so lässt sich leicht zeigen, dass die dritte Gattung fortfällt, und das Integral sich allein auf V_0 und V_1, also auf die erste und zweite Gattung allein reducirt. Wenn nämlich F eine ganze Function ist, so hat der Exponent μ nur positive Werthe. Setzt man nun in (29) zuerst $\mu = o$, so erhält man, weil dann das $V_{\mu-1}$ enthaltende Glied verschwindet,

$$\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi = B\, V_0 - 2CV_1 + 3k^2 V_2.$$

Hiedurch kann man also zunächst V_2 auf V_1 und V_0 zurückführen. Setzt man ferner $\mu = 1$, so folgt

$$(m + \sin^2\varphi).\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi = -2AV_0 + 3BV_1 - 4CV_2 + 5k^2 V_3,$$

wodurch V_3 auf V_0, V_1 und V_2 und damit ebenfalls auf V_0 und V_1 reducirt wird; fährt man so fort, so sieht man, dass die dritte Gattung V_{-1} niemals vorkommt, also das, eine ganze Function F enthaltende, Integral (26) durch die erste und zweite Gattung allein ausgedrückt werden kann.

§ 18.

Das erste der Integrale (30) nennt man die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung. Legendre hat es, wenn es zwischen den Grenzen o und φ genommen wird, mit $F(\varphi)$ bezeichnet:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi).$$

Das zweite Integral

$$\int \frac{(m+\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

führt auf die zweite Gattung. Zur Normalform derselben hat

Legendre eine noch etwas einfachere Form gewählt, nämlich die Form

$$\int \Delta\varphi \, d\varphi.$$

Um jene auf diese zurückzuführen, erinnere man sich, dass man hat

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\Delta^2\varphi}{k^2}, \quad \text{also} \quad m + \sin^2\varphi = \frac{1+mk^2-\Delta^2\varphi}{k^2}.$$

Demnach erhält man

$$\int_0^\varphi \frac{(m+\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1+mk^2}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi.$$

Legendre setzt nun

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi = E_1(\varphi)$$

und nennt dies die Normalform des elliptischen Integrals der zweiten Gattung*). In diesen Legendre'schen Zeichen ausgedrückt, wird nun

$$(31) \quad \int_0^\varphi \frac{(m+\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1+mk^2}{k^2}\,F(\varphi) - \frac{1}{k^2}\,E_1(\varphi).$$

Hiebei ist zu bemerken, dass, wenn man sagt, ein Integral führe auf die zweite Gattung, dabei nicht ausgeschlossen ist, dass der Ausdruck auch die erste Gattung enthalten kann. Dasselbe gilt auch von der dritten Gattung. Sagt man, ein Integral führt auf die dritte Gattung, so kann der Ausdruck für dasselbe auch die erste und zweite Gattung enthalten.

Wir fügen der vorigen Gleichung auch die Ausdrücke für die beiden analogen Integrale

$$\int_0^\varphi \frac{(m+\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{und} \quad \int_0^\varphi \frac{(m+\mathrm{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

---

*) Legendre hatte hiefür eigentlich das Zeichen $E(\varphi)$ angewendet, weil wir aber diesem Zeichen, wie sogleich erhellen wird, eine etwas andere Bedeutung beilegen wollen, so haben wir der Legendre'schen Function E einen Index beigefügt.

hinzu. Man hat

$$m + \cos^2 \varphi = m + 1 - \frac{1 - \Delta^2\varphi}{k^2} = \frac{mk^2 - k'^2}{k^2} + \frac{1}{k^2} \Delta^2\varphi,$$

also ist

$$(32) \quad . \quad . \quad \int_0^\varphi \frac{(m + \cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{mk^2 - k'^2}{k^2} F(\varphi) + \frac{1}{k^2} E_1(\varphi).$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{(m + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} &= m\, F(\varphi) + \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi} \\ &= (m-1)\, F(\varphi) + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Um das letztere Integral zu ermitteln, differentiire man den Ausdruck $\operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi$, dann erhält man

$$\frac{d(\operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi)}{d\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\Delta^2\varphi - k^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi},$$

und wenn man $\Delta^2\varphi = k'^2 + k^2 \cos^2 \varphi$ substituirt und integrirt,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi &= k'^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi} + \int_0^\varphi \frac{k^2 \cos^2 \varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} \\ &= k'^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi} + \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi - k'^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \end{aligned}$$

Demnach erhält man

$$(34) \quad . \quad . \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi}{k'^2} - \frac{E_1(\varphi)}{k'^2} + F(\varphi),$$

und wenn man dies in (33) substituirt,

$$(35) \quad . \quad . \quad \int_0^\varphi \frac{(m + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi}{k'^2} + m\, F(\varphi) - \frac{E_1(\varphi)}{k'^2},$$

Setzt man noch in den Formeln (31), (32), (35) $m = o$, so hat man auch

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} &= \frac{F(\varphi)-E_1(\varphi)}{k^2}\\
\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} &= \frac{-k'^2 F(\varphi)+E_1(\varphi)}{k^2}\\
\int_0^\varphi \frac{\mathrm{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} &= \frac{\mathrm{tg}\,\varphi\,\Delta\varphi - E_1(\varphi)}{k'^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Nachdem durch die Umkehrung des elliptischen Integrals der ersten Gattung die Einführung der eigentlichen elliptischen Functionen gewonnen war, wurde statt der Amplitude φ das Integral der ersten Gattung selbst, also wenn man

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$$

setzt, die Grösse u das Argument für die elliptischen Functionen. Diese Grösse führte Jacobi nun auch als Argument für die elliptischen Integrale zweiter Gattung ein, sodass sie alsdann auch elliptische Functionen werden, die man, weil sie Integrale von elliptischen Functionen sind, zum Unterschiede von den einfachen elliptischen Functionen

$$\sin am\, u, \ \cos am\, u, \ \Delta\, am\, u$$

elliptische Transcendenten nennen kann. Da nämlich

$$\varphi = am\, u,$$

und nach § 4

$$d\varphi = \Delta\, am\, u\, du$$

ist, so erhält man

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^u \Delta^2\, am\, u\, du.$$

Diese Function möge mit $E(u)$ bezeichnet werden, sodass

$$E_1(\varphi) = E(u)$$

ist. Drückt man nun in den Formeln (36) alles durch u aus, so erhält man

$$\int_0^u \Delta^2\, am\, u\, du = E(u),$$

$$\int_0^u \sin^2 am\, u\, du = \frac{u - E(u)}{k^2},$$

$$\int_0^u \cos^2 am\, u\, du = \frac{-k'^2 u + E(u)}{k^2},$$

$$\int_0^u \operatorname{tg}^2 am\, u\, du = \frac{\operatorname{tg} am\, u\, \Delta\, am\, u - E(u)}{k'^2}.$$

Das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung, nämlich dasselbe für den Werth $\frac{\pi}{2}$ der Amplitude φ, oder was ebenso viel ist, für den Werth K des Arguments u, bezeichnete Legendre mit E^1, sodass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = E^1.$$

Wir werden es kürzer mit E bezeichnen, also setzen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^K \Delta^2 am\, u\, du = E(K) = E.$$

In den „Fundamenten" hat übrigens Jacobi die Function $E(u)$ gar nicht, sondern führt im § 47 die Function $Z(u)$ ein, welche mit jener durch die Relation

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u$$

verbunden ist, und von der weiter unten*) noch die Rede sein soll.

§ 19.

Die dritte Gattung entspringt aus der Form

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \int \frac{d\varphi}{(m + \sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Legendre hat hier als Normalform die folgende

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

*) Vgl. Abschn. XV.

aufgestellt und, das Integral zwischen den Grenzen o und φ genommen, mit $\Pi(\varphi, n)$ bezeichnet. Da Jacobi das Zeichen Π beibehalten, aber in gänzlich veränderter Weise angewendet hat, so wollen wir, um die Verwirrung der Zeichen zu vermeiden, die Legendre'sche Normalform der elliptischen Integrale dritter Gattung mit Π_1 bezeichnen, also setzen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \Pi_1(\varphi, n).$$

Während die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung nur von zwei Grössen abhängen, der Amplitude und dem Modul, enthält die dritte Gattung noch eine dritte Grösse, nämlich die Grösse n, welche Legendre den Parameter genannt hat. Dieser Parameter kann, wie aus der Entstehung der dritten Gattung hervorgeht, sowohl reell als auch imaginär sein.

Das Integral (37) und die beiden ihm analogen, lassen sich nun leicht auf die Normalform zurückführen. Zuerst ist

$$m + \sin^2\varphi = m\left(1 + \frac{1}{m}\sin^2\varphi\right),$$

daher

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(m+\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{1}{m}\,\Pi_1\left(\varphi, \frac{1}{m}\right).$$

Ferner:

$$m + \cos^2\varphi = (m+1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\sin^2\varphi\right),$$

also

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(m+\cos^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{1}{m+1}\,\Pi_1\left(\varphi, -\frac{1}{m+1}\right).$$

Drittens ist:

$$m + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{m\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = m\,\frac{1 - \frac{m-1}{m}\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi},$$

also

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(m+\operatorname{tg}^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{1}{m}\int_0^\varphi \frac{(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\left(1 - \frac{m-1}{m}\sin^2\varphi\right)\Delta\varphi},$$

$$= \frac{1}{m}\,\Pi_1\left(\varphi, -\frac{m-1}{m}\right) - \frac{1}{m}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\left(1 - \frac{m-1}{m}\sin^2\varphi\right)\Delta\varphi}.$$

Nun ist aber

$$\sin^2\varphi = \frac{m}{m-1}\left[1 - \left(1 - \frac{m-1}{m}\sin^2\varphi\right)\right],$$

mithin

$$-\frac{1}{m}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\left(1-\frac{m-1}{m}\sin^2\varphi\right)\Delta\varphi}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\,\Pi_1\left(\varphi, -\frac{m-1}{m}\right) + \frac{1}{m-1}\,F(\varphi)$$

und

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(m+\operatorname{tg}^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{1}{m-1}\,F(\varphi) - \frac{1}{m(m-1)}\,\Pi_1\left(\varphi, -\frac{m-1}{m}\right).$$

Für den Fall, dass $m = o$ ist, reduciren sich die eben betrachteten Integrale auf die zweite Gattung. Eines derselben, nämlich

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}$$

haben wir schon unter (34) ermittelt. Die beiden anderen ergeben sich auf ähnliche Weise. Nämlich man hat

$$\frac{d(\operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi)}{d\varphi} = -\frac{\Delta\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{k^2\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \frac{-\Delta^2\varphi - k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} + \frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Integrirt man nun, um das Unendliche zu vermeiden, zwischen den Grenzen φ und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi + k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und wenn man die erste der Formeln (36) benutzt und sich erinnert, dass $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = K$ und $E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = E$ ist,

$$38)\quad \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi + K - E - F(\varphi) + E_1(\varphi).$$

Das andere Integral lässt sich auf dieses zurückführen; es ist

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi\, \Delta\varphi} = \int \frac{(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sin^2\varphi\, \Delta\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\, \Delta\varphi} - \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi};$$

nimmt man also wieder, um das Unendliche zu vermeiden, φ und $\frac{\pi}{2}$ als Grenzen, so ergiebt sich

$$(39) \quad . \quad . \quad \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi\, \Delta\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi\, \Delta\varphi - E + E_1(\varphi).$$

Drückt man auch hier die Formeln (34), (38), (39) in elliptischen Functionen aus, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\int_u^K \frac{du}{\sin^2 am\, u} &= \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta\, am\, u - u + E(u) + K - E \\
\int_0^u \frac{du}{\cos^2 am\, u} &= \frac{\operatorname{tg} am\, u\, \Delta\, am\, u}{k'^2} - \frac{E(u)}{k'^2} + u \\
\int_u^K \frac{du}{\operatorname{tg}^2 am\, u} &= \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta\, am\, u - E + E(u).
\end{aligned}\right\} (40)$$

§ 20.

Die Form, welche Jacobi als die Normalform für die elliptischen Integrale der dritten Gattung wählte, ist folgende. Er setzte

$$\int_0^u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = \Pi(u, a).$$

Der Zusammenhang derselben mit der Legendre'schen Form ergiebt sich folgendermassen. Da man hat

$$\frac{1}{1+n\sin^2\varphi} = 1 - \frac{n\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi},$$

so ist

$$\Pi_1(\varphi, n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\, \Delta\varphi} = F(\varphi) - \int_0^{\varphi} \frac{n\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\, \Delta\varphi}.$$

Jacobi gab nun der dritten Gattung in dem Falle eine reelle Form, wenn der Parameter n ein negativer echter Bruch und absolut genommen kleiner als k^2 ist, indem er setzte

$$n = -k^2 \sin^2 am\, a;$$

und nach Jacobi nennt man jetzt die Grösse a den Parameter. Führt man nun u und a statt φ und n in die letzte Formel ein, so erhält man

$$\Pi_1 (\varphi, n) = u + \int_0^u \frac{k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

und folglich

$$\Pi_1 (\varphi, n) = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a} \Pi (u, a) \; [n = -k^2 \sin^2 am\, a],$$

wodurch der Uebergang von der Legendre'schen zur Jacobi'schen Normalform gegeben ist.

Aus der Definition der Transcendenten Π folgen sogleich einige Eigenschaften derselben; zunächst ist

$$\Pi (o, a) = o.$$

Da ferner (§ 7. S. 18)

$$\sin am\, K = 1, \quad \cos am\, K = o, \quad \Delta\, am\, K = k',$$

so folgt

$$(41) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \Pi (u, K) = o.$$

Für $a = iK'$ werden $\sin am\, a$, $\cos am\, a$ und $\Delta\, am\, a$ unendlich gross, also ist auch

$$\Pi (u, iK') = \infty.$$

Endlich ist (§ 10. S. 29.)

$$\sin am\, (K \pm iK') = \frac{1}{k}, \quad \cos am\, (K \pm iK') = \mp \frac{ik'}{k},$$

$$\Delta\, am\, (K \pm iK') = o,$$

mithin

$$\Pi (u, K \pm iK') = o.$$

Um den Werth der Transcendenten Π für den Werth K des Arguments u zu ermitteln, müssen wir zuerst einen wichtigen Satz beweisen, der in einer Relation besteht, die sich ergiebt, wenn man das Argument u mit dem Parameter a vertauscht. Diese geht aus der Betrachtung der identischen Gleichung

$$(42) \quad . \quad \Pi (u, a) - u\, E (a) = \int_0^u \int_0^a \frac{\partial^2 [\Pi(u, a) - u\, E(a)]}{\partial u\, \partial a} du\, da$$

hervor. Denn man hat

$$\frac{\partial\, \Pi (u, a)}{\partial u} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi(u,a)}{\partial u\,\partial a} = \frac{k^2 \sin^2 am\,u}{1 - k^2 \sin^2 am\,a \sin^2 am\,u} \cdot \left[\cos^2 am\,a\,\Delta^2 am\,a - \sin^2 am\,a\,\Delta^2 am\,a - k^2 \sin^2 am\,a \cos^2 am\,a\right]$$
$$+ \frac{2k^4 \sin^4 am\,u \sin^2 am\,a \cos^2 am\,a\,\Delta^2 am\,a}{[1 - k^2 \sin^2 am\,a \sin^2 am\,u]^2}.$$

Ferner

$$\frac{\partial\,(u\,E\,(a))}{\partial u} = E\,(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\,(u\,E\,(a))}{\partial u\,\partial a} = \frac{d\,E\,(a)}{da} = \Delta^2\ am\ a.$$

Bildet man nun den rechten Theil der Gl. (42), so erhält man nach einigen Reductionen

$$\Pi\,(u,a) - u\,E\,(a) =$$
$$= -\int_0^u\!\!\int_0^a \frac{\Delta^2 am\,a\,\Delta^2 am\,u + k^4 \sin^2 am\,a \cos^2 am\,a \sin^2 am\,u \cos^2 am\,u}{(1 - k^2 \sin^2 am\,a \sin^2 am\,u)^2}\,da\,du.$$

Nun ist ersichtlich, dass der Ausdruck rechter Hand ungeändert bleibt, wenn man a mit u vertauscht, da er in Beziehung auf diese beiden Grössen symmetrisch ist. Daher muss auch der Ausdruck links bei dieser Vertauschung ungeändert bleiben. Man hat daher

$$\Pi\,(u,a) - u\,E\,(a) = \Pi\,(a,u) - a\,E\,(u)$$

oder

$$\Pi\,(u,a) = \Pi\,(a,u) + u\,E\,(a) - a\,E\,(u).$$

Diese Gleichung zeigt, dass man das Integral der dritten Gattung auf ein anderes zurückführen kann, in welchem das Argument und der Parameter mit einander vertauscht sind.

Hieraus ergiebt sich nun ein Ausdruck für das Integral dritter Gattung für den Werth $\frac{\pi}{2}$ der Amplitude oder, was dasselbe ist, für den Werth K des Arguments. Denn da nach (41) $\Pi\,(a, K) = o$ ist, so erhält man, wenn man in der vorigen Gl. K statt u setzt,

$$\Pi\,(K,a) = K\,E\,(a) - a\,E.$$

Für den Werth K des Arguments reducirt sich also die Transcendente Π auf die zweite Gattung.

Fünfter Abschnitt.

Rectification der Ellipse und Hyperbel.

---

§ 21.

Der Bogen einer Ellipse oder Hyperbel wird durch elliptische Integrale der zweiten Gattung ausgedrückt.

Ist

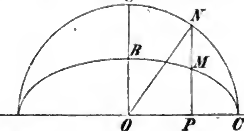
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse bezogen auf ihre Hauptaxen, und nimmt man $a > b$, so wird der Bogen s der Ellipse ausgedrückt durch das Integral

$$s = \frac{1}{a} \int_0^x \frac{[a^4 - (a^2 - b^2) x^2]\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)\,[a^4 - (a^2 - b^2) x^2]}}$$

und ist dann von dem Puncte B (Fig. 3), in welchem die Ellipse die kleine Axe schneidet, an gezählt. Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen besteht, wie man sieht, aus vier reellen linearen Factoren, und zwar liegt x für reelle Puncte der Ellipse zwischen $-a$ und $+a$.

Fig. 3.



Die Reduction auf die Normalform ergiebt sich hier ganz von selbst; denn man wird erreichen, dass z zwischen -1 und $+1$ liegt, wenn man

$$\frac{x}{a} = z$$

setzt. Da sich nun das Integral schreiben lässt

$$s = \int_0^x \frac{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right) dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)}},$$

so erhält man sogleich die gewünschte Form, wenn man

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$$

setzt, welches ein echter Bruch ist. Dann entsteht

$$s = a \int_0^z \frac{(1-k^2z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

und wenn man noch

$$z = \sin\varphi, \quad \text{also} \quad x = a \sin\varphi$$

setzt,

$$s = a \int_0^\varphi \Delta\varphi \; d\varphi = a\, E_1(\varphi) = BM.$$

Da für $x = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird, so erhält man für den elliptischen Quadranten BC

$$BC = a\,E.$$

Der Modul k ist hier nichts anderes, als die numerische Excentricität der Ellipse, daher kann man sagen, dass das elliptische Integral der zweiten Gattung $E_1(\varphi)$ den vom Scheitel der kleinen Axe an gerechneten Bogen einer Ellipse darstellt, deren grosse Axe der Einheit, und deren numerische Excentricität dem Modul gleich ist. Die geometrische Bedeutung des Winkels φ ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung $x = a \sin\varphi$. Denn beschreibt man aus dem Mittelpuncte O mit der halben grossen Axe einen Kreis, verlängert die Ordinate PM, bis der Kreis in N geschnitten wird, und zieht ON, so ist BON gleich dem Winkel φ.

§ 22.

Der Bogen S einer Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, wird durch das Integral

$$S = \frac{1}{a} \int_a^x \frac{[(a^2+b^2)x^2 - a^4]\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)\,[(a^2+b^2)x^2 - a^4]}}$$

ausgedrückt, und dann von dem auf der positiven Seite liegenden Scheitel an gerechnet. Hier ist für alle Puncte der Curve $x > a$ oder $< -a$, d. h. x liegt in dem Intervalle $+a \ldots \pm\infty \ldots -a$. Wenn man daher

$$\frac{a}{x} = z$$

setzt, so ist z ein echter Bruch. Nun kann man den vorigen Ausdruck zunächst so schreiben:

$$S = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \int_a^x \frac{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2}{x^2}\right) dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2}{x^2}\right)}}.$$

Setzt man dann

$$\frac{a}{x} = z, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{a\,dz}{z^2}$$

und

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} = k^2,$$

so wird k ein echter Bruch, nämlich das Reciproke der numerischen Excentricität der Hyperbel, und man erhält

$$S = -\frac{a}{k} \int_1^z \frac{(1-k^2z^2)\,dz}{z^2\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Setzt man dann noch

(43) . . . . $z = \sin\varphi, \quad \text{also} \quad x = \frac{a}{\sin\varphi}$,

so folgt

(44) . . . . $$S = \frac{a}{k} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta^2\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}.$$

Dieses Integral ist nun leicht durch die Functionen F und E_1 auszudrücken. Denn zuerst ergiebt sich, wenn man für $\Delta^2\varphi$ seinen Werth $1 - k^2 \sin^2\varphi$ setzt,

$$S = \frac{a}{k} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} - ak \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und wenn man den unter (38) gefundenen Werth des ersteren Integrals substituirt,

$$S = \frac{a}{k} \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi - \frac{a}{k} F(\varphi) + \frac{a}{k} E_1(\varphi)$$
$$+ \frac{a}{k} K - \frac{a}{k} E - akK + ak\,F(\varphi)$$

(45) . $$= \frac{a}{k} \operatorname{cotg}\varphi\,\Delta\varphi - \frac{ak'^2}{k} F(\varphi) + \frac{ak'^2}{k} K$$
$$+ \frac{a}{k} E_1(\varphi) - \frac{a}{k} E.$$

Dieser Ausdruck erlaubt noch eine Vereinfachung, indem man die Glieder, welche K und E enthalten, fortschaffen kann. Um zu dieser Transformation zu gelangen, stellen wir den gesuchten einfacheren Ausdruck zuerst auf eine andere Weise her. Zu demselben gelangt man nämlich auch, wenn man in dem Integral, das den Bogen darstellt, nicht x, sondern y als die unabhängige Variable annimmt. Da dies zugleich ein Beispiel für den Fall liefert, in welchem der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen aus vier imaginären linearen Factoren besteht, so möge es hier noch ausgeführt werden.

Drückt man das Differential des Bogens der Hyperbel durch y allein aus, so erhält man durch eine leichte Rechnung

$$S = \frac{1}{b}\int_0^y \frac{[b^4+(a^2+b^2)y^2]\,dy}{\sqrt{(b^2+y^2)\,[b^4+(a^2+b^2)y^2]}},$$

worin der Bogen ebenfalls von dem positiven Scheitel an gerechnet wird. Hier sind, wie man sieht, alle vier linearen Factoren des Radicals imaginär, zugleich aber ist die Veränderlichkeit von y in keine Grenzen eingeschlossen, sondern y kann alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Man kann nun leicht das Differential, abgesehen von dem Zähler $b^4 + (a^2 + b^2)\,y^2$ auf die Form

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)\,(1+\lambda^2 z^2)}}$$

bringen, und da nach § 12 alsdann $z = \operatorname{tg}\psi$ zu setzen ist, so darf auch z alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Zu berücksichtigen hat man nur (§ 12), dass $\lambda^2 < 1$ werde. Man erhält nun zunächst

$$S = \int_0^y \frac{\left(1 + \frac{a^2+b^2}{b^4}\,y^2\right)dy}{\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2}{b^4}\,y^2\right)}},$$

und wird dann sofort auf die gewünschte Form geführt, wenn man entweder

$$\frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad \text{oder} \quad \frac{a^2+b^2}{b^4}\,y^2 = z^2$$

setzt. Allein aus den Betrachtungen des § 12 geht hervor, dass

in dem einen Falle λ^2 grösser und in dem anderen kleiner als 1 wird. In der That, setzt man

$$\frac{y^2}{b^2} = z^2, \text{ so wird } \frac{a^2+b^2}{b^4}\, y^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}\, z^2,$$

mithin

$$\lambda^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}, \text{ grösser als } 1.$$

Setzt man aber

$$\frac{a^2+b^2}{b^4}\, y^2 = z^2, \text{ so wird } \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\, z^2,$$

also

$$\lambda^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \text{ kleiner als } 1.$$

Es muss also die letztere Substitution angewendet werden, und mit ihr erhält man

$$S = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_0^z \frac{(1+z^2)\,dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+\lambda^2 z^2)}},$$

oder wenn man nach § 12

(46) $$z = \operatorname{tg}\psi,\quad 1-\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} = k^2,\quad y^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}\operatorname{tg}^2\psi$$

setzt,

$$S = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos^2\psi\, \Delta\psi},$$

oder da

$$\frac{b^2}{a^2+b^2} = k'^2,\ \sqrt{a^2+b^2} = \frac{a}{k}$$

ist,

(47) . . . . $$S = \frac{ak'^2}{k} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos^2\psi\, \Delta\psi},$$

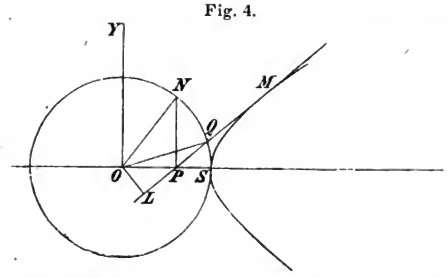
worin der Modul derselbe, wie in dem Integral (44), nämlich das Reciproke der numerischen Excentricität der Hyperbel ist. Vorstehendes Integral ist unter (34) schon ermittelt, demnach erhält man für den Hyperbelbogen

(48) . . . $$S = \frac{a}{k}\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi + \frac{ak'^2}{k}\,F(\psi) - \frac{a}{k}\,E_1(\psi).$$

Wir schreiten nun zunächst zur Ermittelung der geometrischen Bedeutung der Winkel φ und ψ. Zu diesem Ende legen

wir in dem Endpuncte M des Hyperbelbogens SM (Fig. 4) eine

Fig. 4.



Tangente an die Hyperbel, welche die Abscissenaxe im Puncte P schneiden möge. Dann ist, wenn ξ und η die laufenden Coordinaten der Tangente bedeuten

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$$

die Gleichung derselben, und daher die Entfernung OP des Punctes P vom Mittelpuncte O der Hyperbel

$$OP = \frac{a^2}{x}.$$

Nun war aber in (43) der Winkel φ durch die Relation $a = x \sin\varphi$ eingeführt, folglich wird

$$OP = a \sin\varphi.$$

Hieraus folgt die Construction des Winkels φ, denn beschreibt man aus dem Mittelpuncte O einen Kreis mit der halben grossen Axe als Radius, errichtet in P eine Senkrechte auf der letzteren und bezeichnet mit N den Durchschnittspunct dieser Senkrechten mit dem Kreise, so ist φ die Neigung der Geraden ON gegen die Ordinatenaxe, also $\varphi = YON$.

Der Winkel ψ war durch die Gleichung (46)

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{tg} \psi$$

bestimmt. Führt man statt der kleinen Axe b den Modul ein, so ist, da

$$b = \frac{ak'}{k}$$

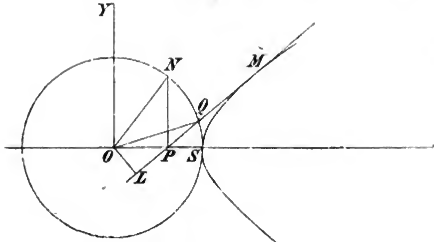
ist,

$$y = \frac{ak'^2}{k} \operatorname{tg} \psi,$$

und dann folgt aus der Gleichung der Hyperbel

$$x = a \sqrt{1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{a \varDelta\psi}{\cos \psi}.$$

Fig. 4.



Bezeichnet ferner α den Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so hat man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

und wenn man b, x, y durch k, k', ψ ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varDelta\psi}{k \sin \psi},$$

woraus auch

$$\cos \alpha = k \sin \psi, \quad \sin \alpha = \varDelta\psi$$

folgt. Fällt man nun aus dem Mittelpuncte O ein Perpendikel OL auf die Tangente, so ist

$$OL = OP \sin \alpha = \frac{a^2}{x} \sin \alpha = \frac{a^2 \cos \psi}{a \varDelta\psi} \varDelta\psi$$
$$= a \cos \psi.$$

Demnach ist die Bedeutung des Winkels ψ folgende: Bezeichnet Q den Durchschnittspunct der Tangente mit dem Kreise, so ist ψ der Winkel zwischen der Geraden OQ und dem Perpendikel OL, also

$$\psi = QOL.$$

Aus dem Vorstehenden lässt sich auch die geometrische Bedeutung des ersten Gliedes $\frac{a}{k} \operatorname{tg} \psi \varDelta\psi$ in dem Ausdrucke (48) für den Hyperbelbogen herleiten und zeigen, dass derselbe das Stück ML der Tangente, welches von dem Berührungspuncte M und

der aus dem Mittelpuncte gefällten Senkrechten OL begrenzt wird, ausdrückt. Denn man hat

$$ML = LP + PM = OP \cos\alpha + \frac{x - OP}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{OP\sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

also wenn man die obigen Ausdrücke für x, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ einsetzt und bemerkt, dass $OP \sin\alpha = OL = a\cos\psi$ ist,

$$ML = \frac{a\Delta\psi}{k\sin\psi\cos\psi} - \frac{a\cos\psi\,\Delta\psi}{k\sin\psi},$$

woraus unmittelbar

$$ML = \frac{a}{k}\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi$$

folgt.

Endlich liefern die obigen Formeln auch die zwischen den Winkeln φ und ψ stattfindende Relation. Denn einerseits war

$$x = \frac{a}{\sin\varphi},$$

andererseits

$$x = \frac{a\Delta\psi}{\cos\psi},$$

folglich ist

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi}.$$

Dieses muss daher die Substitution sein, vermittelst welcher es gelingen muss, den Ausdruck (45) in den einfacheren (48) umzuformen. Zuerst ist klar, dass dadurch das Integral (44) wirklich in (47) übergeht. Denn erinnert man sich, dass die in Rede stehende Substitution dieselbe ist, die schon im § 10 angewendet wurde, so hat man auch die Formeln (S. 26 (15))

$$\cos\varphi = \frac{k'\sin\psi}{\Delta\psi}, \quad \Delta\varphi = \frac{k'}{\Delta\psi}, \quad \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\psi}{\Delta\psi},$$

welche das Integral (47) aus (44) unmittelbar herstellen. Aus dem angeführten § geht aber auch hervor, dass dieselbe Substitution zu den Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen

$$(49)\quad \sin am\,(K - u) = \frac{\cos am\,u}{\Delta\,am\,u},\ \cos am\,(K - u) = \frac{k'\sin am\,u}{\Delta\,am\,u}$$
$$\Delta\,am\,(K - u) = \frac{k'}{\Delta\,am\,u}$$

führte. Wenn man daher

$$\varphi = am\,v \quad \text{und} \quad \psi = am\,u$$

setzt, so wird die gewünschte Umformung zu Stande kommen, wenn man

$$v = K - u$$

annimmt. Drückt man also nun die Formeln (45) und (48) in elliptischen Functionen aus, indem man

$$F(\varphi) = v, \quad \varphi = am\, v, \quad E_1(\varphi) = E(v)$$
$$F(\psi) = u, \quad \psi = am\, u, \quad E_1(\psi) = E(u)$$

setzt und dadurch

$$(50) \quad S = \frac{a}{k} \operatorname{cotg} am\, v\, \varDelta\, am\, v + \frac{ak'^2}{k}(K - v) + \frac{a}{k}(E(v) - E),$$

$$(51) \quad S = \frac{a}{k} \operatorname{tg} am\, u\, \varDelta\, am\, u + \frac{ak'^2}{k} u - \frac{a}{k} E(u)$$

erhält, so muss die erstere Formel in die letztere durch Annahme von

$$v = K - u$$

übergehen. Diese Rechnung wirklich auszuführen, wollen wir uns um so mehr die Mühe nicht verdriessen lassen, als es ein erstes Beispiel einer Rechnung mit elliptischen Functionen ist.

Man erhält zuerst aus (50)

$$S = \frac{a}{k} \operatorname{cotg} am\,(K-u)\, \varDelta\, am\,(K-u) + \frac{ak'^2}{k} u$$
$$+ \frac{a}{k}[E(K-u) - E]$$

oder mit Anwendung der Formeln (49)

$$(52) \quad S = \frac{ak'^2}{k} \frac{\operatorname{tg} am\, u}{\varDelta\, am\, u} + a\frac{k'^2}{k} u + \frac{a}{k}[E(K-u) - E].$$

sodass es nur noch auf die Ermittelung von $E(K-u)$ ankommt. Nach der Definition der Function E (§ 18) hat man, wenn der Integrations-Buchstabe mit α bezeichnet wird,

$$E(K-u) = \int_0^{K-u} \varDelta^2\, am\, \alpha\, d\alpha = \int_0^{K} \varDelta^2\, am\, \alpha\, d\alpha - \int_{K-u}^{K} \varDelta^2\, am\, \alpha\, d\alpha,$$

oder wenn man in dem letzten Integrale $\beta = K - \alpha$ setzt, wodurch die Grenzen in Beziehung auf β in u und o übergehen, und weil auch

$$\int_0^K \varDelta^2\, am\, \alpha\, d\alpha = E \quad (\S\ 18.)$$

ist,

$$E(K-u) = E - \int_0^u \Delta^2 am\,(K-\beta)\,d\beta$$

$$(53) \quad \ldots\ldots \quad = E - k'^2 \int_0^u \frac{d\beta}{\Delta^2 am\,\beta}.$$

Die Ermittelung dieses Integrals kann nach der in § 19 bereits mehrere Male angewendeten Methode, durch Differentiation eines geeigneten Ausdrucks geschehen. Man könnte es auch leicht in trigonometrischer Form darstellen, indem es durch $am\,\beta = \varphi$ in

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^3 \varphi}$$

übergehen würde; wir wollen aber die Rechnung lieber ganz in elliptischen Functionen durchführen. Man gelangt zu dem gesuchten Integrale durch Differentiation des Ausdrucks

$$\frac{\operatorname{tg} am\,u}{\Delta\,am\,u}.$$

Da nun

$$\frac{d \operatorname{tg} am\,u}{du} = \frac{\Delta\,am\,u}{\cos^2 am\,u}$$

ist (was sich ebenso, wie die Formeln 2) § 4 ergiebt), so erhält man nach denselben Formeln

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{tg} am\,u}{\Delta\,am\,u}\right) = \frac{\frac{\Delta^2 am\,u}{\cos^2 am\,u} + k^2 \sin^2 am\,u}{\Delta^2 am\,u}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 am\,u} + \frac{k^2 \sin^2 am\,u}{\Delta^2 am\,u}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 am\,u} + \frac{1}{\Delta^2 am\,u} - 1,$$

und demnach durch Integration

$$\int_0^u \frac{du}{\Delta^2 am\,u} = \frac{\operatorname{tg} am\,u}{\Delta\,am\,u} + u - \int_0^u \frac{du}{\cos^2 am\,u}.$$

Substituirt man nun den unter (40) bestimmten Werth des letzteren Integrals, so entsteht

$$\int_0^u \frac{du}{\Delta^2 am\,u} = \frac{\operatorname{tg} am\,u}{\Delta\,am\,u} - \frac{\operatorname{tg} am\,u\,\Delta\,am\,u}{k'^2} + \frac{E(u)}{k'^2},$$

oder weil

$$k'^2 - \varDelta^2\, am\, u = -\, k^2 \cos^2 am\, u,$$

$$(54) \quad \int_0^u \frac{du}{\varDelta^2\, am\, u} = -\frac{k^2}{k'^2} \cdot \frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u} + \frac{E(u)}{k'^2}.$$

Dieses nun in (53) substituirt, liefert

$$E(K-u) = E - E(u) + \frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u},$$

welche Formel einen speciellen Fall eines allgemeineren, später zu beweisenden, Satzes enthält.*) Den eben gefundenen Ausdruck hat man nun in (52) einzusetzen. Dann folgt

$$S = \frac{ak'^2}{k} \cdot \frac{\operatorname{tg} am\, u}{\varDelta\, am\, u} + \frac{ak \sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u} + \frac{ak'^2}{k} u - \frac{a}{k} E(u)$$

und, indem man die beiden ersten Glieder mit Anwendung der Formel

$$k'^2 + k^2 \cos^2 am\, u = \varDelta^2\, am\, u$$

vereinigt,

$$S = \frac{a}{k} \operatorname{tg} am\, u\; \varDelta\, am\, u + \frac{ak'^2}{k} u - \frac{a}{k} E(u),$$

wodurch die Gleichung (51) hergestellt ist.

Sechster Abschnitt.

Ueber eine Substitution der zweiten Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform.

§ 23.

Wir gehen jetzt zu der Betrachtung einer Substitution der zweiten Ordnung über, für den Fall, dass die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen aus lauter reellen linearen Factoren besteht. Diese Substitution ist einer besonderen Aufmerksamkeit werth, einmal, weil sie in vielen Fällen einfachere Resultate liefert, als eine Substitution der ersten Ordnung, dann aber, weil wir hier

*) Vgl. § 33.

die Quelle finden werden, aus welcher die in den §§ 8 und 10 angewendeten Transformationen fliessen, und die uns dann auch dazu führen wird, die elliptischen Functionen mit einem Modul, der grösser als 1 ist, oder mit imaginärem Modul auf elliptische Functionen mit reellem Modul, kleiner als 1, zurückzuführen.

Bezeichnen wir wieder wie früher mit

$$\int \frac{dx}{R}$$

das zu transformirende Integral, worin

$$R = \sqrt{A\,(x-p)\,(x-q)\,(x-r)\,(x-s)}$$

gesetzt sei, so ist dieses Integral auf die Form

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad C\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}}$$

zu bringen. Dieses kann nun durch eine Substitution von der Form

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{a+bz^2}{c+dz^2}$$

geschehen. Man kann nämlich den Ausdruck (1) leicht in einen anderen umwandeln, in dem z^2 die Variable ist. Setzt man nämlich

$$z^2 = y$$

und nimmt an, dass z der positiven Wurzel aus y gleich sei, so wird

$$dz = \tfrac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

mithin

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y\,(1-y)\,(1-k^2y)}}.$$

Dadurch erhalten wir unter dem Wurzelzeichen einen Ausdruck vom 3ten Grade, welcher für die Werthe o, 1 und $\frac{1}{k^2}$ von y verschwindet. Die vierte Wurzel der Gleichung $y\,(1-y)\,(1-k^2y) = o$ können wir alsdann, wie früher (§ 14) gezeigt worden ist, als unendlich gross ansehen. Demnach sind

$$o,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty$$

die Werthe von y, welche den Werthen

$$p,\ q,\ r,\ \ s$$

von x entsprechen müssen, und wir wollen annehmen, dass dies

auch in der angegebenen Reihenfolge der Fall sei. Damit k^2 ein echter Bruch werde, haben wir nur $\frac{1}{k^2}$ zwischen 1 und ∞ liegend anzunehmen, und damit y oder z^2 ein echter Bruch bleibe, hat man an die Stelle von p und q, welche den Werthen o und 1 von y entsprechen sollen, diejenigen beiden Wurzeln der Gl. $R^2 = o$ zu setzen, zwischen welchen die Grenzen des Integrals liegen. Es greifen hier wieder die Bemerkungen des § 13 Platz, und in derselben Weise wie dort bestimmt man, welche Wurzeln man an die Stelle von r und s zu setzen hat. Auch ergeben sich hier wieder in jedem Falle zwei Substitutionen, indem bei der einen x und y gleichzeitig abnehmen oder wachsen, bei der nderen nicht.

Substituirt man nun in die Gleichung (2), die, durch y ausgedrückt, lautet

$$x = \frac{a + by}{c + dy},$$

nach und nach die Werthe p, q, r, s von x und die ihnen entsprechenden Werthe o, 1, $\frac{1}{k^2}$, ∞ von y, so erhält man vier Gleichungen, die zur Bestimmung der drei Verhältnisse der Grössen a, b, c, d und des Werthes von k^2 ausreichen. Man erhält dadurch nämlich

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{a+b}{c+d}, \quad r = \frac{k^2 a + b}{k^2 c + d}, \quad s = \frac{b}{d}.$$

Indem man in die beiden mittleren Gleichungen die aus der ersten und vierten folgenden Werthe

$$a = pc \quad b = sd$$

einsetzt, ergiebt sich

$$q = \frac{pc + sd}{c+d} = \frac{p + s\frac{d}{c}}{1 + \frac{d}{c}},$$

und daraus

$$\frac{d}{c} = \frac{p-q}{q-s}.$$

Ebenso erhält man

$$r = \frac{k^2 pc + sd}{k^2 c + d} = \frac{k^2 p + s\frac{p-q}{q-s}}{k^2 + \frac{p-q}{q-s}},$$

und daraus

$$k^2(r-p) = (s-r)\frac{p-q}{q-s},$$

$$(3) \quad \dots\dots\dots \quad k^2 = \frac{(p-q)(r-s)}{(p-r)(q-s)}.$$

Ferner erhält man

$$x = \frac{pc + s\,dy}{c + dy} = \frac{p + s\,\frac{p-q}{q-s}\,y}{1 + \frac{p-q}{q-s}\,y},$$

$$(4) \quad \dots \quad x = \frac{p(q-s) + s(p-q)y}{q-s+(p-q)y}$$

und dann, wenn man der Kürze wegen den Nenner

$$q - s + (p-q)y = N$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned}
x - p &= -\frac{(p-s)(p-q)y}{N} \\
x - q &= \frac{(p-q)(q-s)-(p-q)(q-s)y}{N} = \frac{(p-q)(q-s)(1-y)}{N} \\
x - r &= \frac{(p-r)(q-s)-(r-s)(p-q)y}{N} = \frac{(p-r)(q-s)(1-k^2y)}{N} \\
x - s &= \frac{(p-s)(q-s)}{N}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

also

$$A(x-p)(x-q)(x-r)(x-s) =$$
$$-\frac{A(p-q)^2(p-r)(p-s)^2(q-s)^3y(1-y)(1-k^2y)}{N^4}.$$

Ferner wird

$$dx = \frac{((q-s)+(p-q)y)s(p-q)-(p(q-s)+s(p-q)y)(p-q)}{N^2}\,dy,$$

$$= -\frac{(p-q)(q-s)(p-s)}{N^2}\,dy,$$

also

$$(6) \quad \frac{dx^2}{A(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)} = \frac{1}{-A(p-r)(q-s)}\cdot\frac{dy^2}{y(1-y)(1-k^2y)}$$

$$= \frac{4}{-A(p-r)(q-s)}\cdot\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

wovon die positive oder negative Wurzel zu nehmen ist, je nachdem y mit x gleichzeitig wachsen soll, oder nicht.

Aus den Formeln (5) kann man auch durch Division die folgenden ableiten:

$$\frac{x-p}{x-s} = -\frac{p-q}{q-s}\,y,$$

$$\frac{x-q}{x-s} = \frac{p-q}{p-s}(1-y),$$

$$\frac{x-r}{x-s} = \frac{p-r}{p-s}(1-k^2y)$$

und erhält, wenn man

$$y = z^2 = \sin^2\varphi,$$

also

$$1-y = \cos^2\varphi, \quad 1-k^2y = \Delta^2\varphi$$

setzt, daraus

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= -\frac{q-s}{p-q}\cdot\frac{x-p}{x-s} \\ \cos^2\varphi &= \frac{p-s}{p-q}\cdot\frac{x-q}{x-s} \\ \Delta^2\varphi &= \frac{p-s}{p-r}\cdot\frac{x-r}{x-s} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Sind die Wurzeln der Gleichung $R^2 = o$ wieder wie früher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sodass

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta,$$

so hat man folgendes Schema der einander entsprechenden Werthe:

1) z^2 und x nehmen gleichzeitig zu

	$z^2 =$	$o,$	$1,$	$\frac{1}{k^2},$	∞	
	$x =$	$p,$	$q,$	$r,$	s	
$\alpha > x > \beta$	$x =$	$\beta,$	$\alpha,$	$\delta,$	γ	A negativ.
$\beta > x > \gamma$		$\gamma,$	$\beta,$	$\alpha,$	δ	A positiv.
$\gamma > x > \delta$		$\delta,$	$\gamma,$	$\beta,$	α	A negativ.
$\delta > x$ od. $x > \alpha$		$\alpha,$	$\delta,$	$\gamma,$	β	A positiv.

2) z^2 wächst, während x abnimmt

	$p,$	$q,$	$r,$	s	
$\alpha > x > \beta$	$\alpha,$	$\beta,$	$\gamma,$	δ	A negativ.
$\beta > x > \gamma$	$\beta,$	$\gamma,$	$\delta,$	α	A positiv.
$\gamma > x > \delta$	$\gamma,$	$\delta,$	$\alpha,$	β	A negativ.
$\delta > x$ od. $x > \alpha$	$\delta,$	$\alpha,$	$\beta,$	γ	A positiv.

Dieses Schema zeigt, dass in allen Fällen, wo es sich um ein reelles Integral handelt, sowohl der Ausdruck $-A(p-r)(q-s)$, als auch der für k^2 positiv wird.

Um die Anwendbarkeit dieser Transformation der zweiten Ordnung zu zeigen, wollen wir das Integral, welches in der Pendelaufgabe die Zeit angiebt, noch einmal vornehmen. Wir fanden für dasselbe § 15. F. (19)

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}},$$

worin $x = \cos\psi$ und $a = \cos\alpha$ gesetzt war, und ψ die zur Zeit t stattfindende, und α die grösste Ablenkung des Pendels von der Verticallinie bedeutet. Es war im § 15 gezeigt worden, dass bei dieser Substitution, $\cos\psi = x$, eine Transformation der ersten Ordnung nicht auf die einfachste Form führt, dass man vielmehr bei Anwendung einer solchen $\sin\frac{1}{2}\psi$ als neue Variable einführen musste. Wir wollen nun zeigen, dass das vorstehende Integral durch die Substitution der zweiten Ordnung die einfachen Formeln liefert. Als Wurzeln des Radicals sind hier der Grösse nach geordnet anzunehmen

$$+1,\ a,\ -1,\ \infty,$$

und x liegt zwischen 1 und a. Will man nun bewirken, dass z^2 wächst, während x abnimmt, so hat man nach dem letzten Schema zu setzen

$$p = 1,\ q = a,\ r = -1,\ s = \infty,$$

und erhält dann nach (3)

$$k^2 = \frac{1-a}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{also} \quad k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ferner nach (7)

$$z^2 = \sin^2\varphi = -\frac{x-1}{1-a} = \frac{1-\cos\psi}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\psi}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad \text{mithin}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \sin\varphi,$$

endlich nach (6)

$$\frac{dx^2}{-(x-1)(x-a)(x+1)} = \frac{4dz^2}{+2(1-z^2)(1-k^2z)},$$

und da die negative Wurzel zu nehmen ist, weil x und z nicht gleichzeitig wachsen,

$$\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-a)(x+1)}} = -\sqrt{2}\,.\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

endlich, weil $\varphi = o$ wird für $x = 1$,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

welches die im § 6 und dann wieder im § 15 gegebenen Formeln sind.

§ 24.

Die im Vorigen auseinandergesetzte Methode erlaubt eine sehr wichtige Anwendung auf die Verwandlung eines Integrals von der Form

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

welches zwar dieselbe Form, wie die Normalform hat, in welchem aber der Modul λ^2 sowohl grösser als 1, als auch negativ, λ selbst also auch imaginär sein kann, und in welchem auch die Grenzen der Integration die Werthe -1 und $+1$ überschreiten. Wir werden dadurch zu den Formeln der §§ 8 und 10 geführt werden, zugleich aber auch Relationen erhalten, mittelst welcher elliptische Functionen, deren Modul grösser als 1, oder imaginär ist, auf elliptische Functionen mit reellem Modul, der ein echter Bruch ist, zurückgeführt werden.

Verwandelt man nämlich das Integral (8) ähnlich wie (1) in eines, das v^2 als Variable enthält, indem man

$$v^2 = x$$

setzt, so erhält man:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda^2 x)}}.$$

Als Wurzeln des Radicals sind hier die Werthe

$$x = o,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ \infty$$

anzusehen. Diese kann man nun auf 24 verschiedene Arten den Werthen

$$y = o,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty$$

entsprechen lassen. Diese 24 Anordnungen theilen sich in 3 grosse Gruppen, zu je achten; nämlich

1) liegt $\frac{1}{\lambda^2}$ zwischen 1 und ∞, so ist $\lambda^2 < 1$,

2) - - - o - 1, so ist $\lambda^2 > 1$,

3) - - - $-\infty$ - o, so ist λ^2 negativ, also λ imag.

Jede dieser 3 Gruppen besteht wieder aus zwei Theilen; in dem einen wachsen x und y gleichzeitig, in dem andern wächst y, während x abnimmt. Die 4 Anordnungen jedes dieser letzteren Theile entstehen endlich durch cyclische Vertauschung der Elemente einer dieser Anordnungen. Dadurch wird die Aufeinanderfolge nicht geändert, sondern nur bewirkt, dass nach und nach jedes Intervall der Werthe von x einem anderen Intervalle der Werthe von y entspricht. Hienach erhält man nun folgende Tabelle:

$y = z^2 = o,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \infty.$ y nimmt zu.

	$x = v^2 =$	p	q	r	s		
1)	$x = v^2 =$	o	1	$\frac{1}{\lambda^2}$	∞	x nimmt zu	$\lambda^2 < 1$
2)		1	$\frac{1}{\lambda^2}$	∞	o		
3)		$\frac{1}{\lambda^2}$	∞	o	1		
4)		∞	o	1	$\frac{1}{\lambda^2}$		
5)		∞	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	o	x nimmt ab	
6)		$\frac{1}{\lambda^2}$	1	o	∞		
7)		1	o	∞	$\frac{1}{\lambda^2}$		
8)		o	∞	$\frac{1}{\lambda^2}$	1		
9)		o	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	∞	x nimmt zu	$\lambda^2 > 1$
10)		$\frac{1}{\lambda^2}$	1	∞	o		
11)		1	∞	o	$\frac{1}{\lambda^2}$		
12)		∞	o	$\frac{1}{\lambda^2}$	1		

Nr.			
13)	$\infty,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ o$	x nimmt ab	$\lambda^2 > 1$
14)	$1,\ \frac{1}{\lambda^2},\ o,\ \infty$		
15)	$\frac{1}{\lambda^2},\ o,\ \infty,\ 1$		
16)	$o,\ \infty,\ 1,\ \frac{1}{\lambda^2}$		
17)	$o,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{\lambda^2}$	x nimmt zu	λ^2 negativ.
18)	$1,\ \infty,\ \frac{1}{\lambda^2},\ o$		
19)	$\infty,\ \frac{1}{\lambda^2},\ o,\ 1$		
20)	$\frac{1}{\lambda^2},\ o,\ 1,\ \infty$		
21)	$\frac{1}{\lambda^2},\ \infty,\ 1,\ o$	x nimmt ab	
22)	$\infty,\ 1,\ o,\ \frac{1}{\lambda^2}$		
23)	$1,\ o,\ \frac{1}{\lambda^2},\ \infty$		
24)	$o,\ \frac{1}{\lambda^2},\ \infty,\ 1$		

Es wird nun nicht nöthig sein, alle 24 Transformationen durchzunehmen, da sich aus einer wieder mehrere andere ableiten lassen. Es sei aber bemerkt, dass die ersten 8 zu den in § 8 und § 10 entwickelten Formeln führen, die aus den Substitutionen

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = i\ \mathrm{tg}\ \psi$$

hervorgingen. Wir werden diese aufsuchen, zuerst aber aus den 4 ersten die Werthe des elliptischen Integrals zwischen den Grenzen $1 \ldots \frac{1}{k},\ \frac{1}{k} \ldots \infty,\ -\infty \ldots o$ ermitteln.

Nr. 1 liefert nichts Neues, weil v^2 stets zwischen denselben Grenzen liegt, wie z^2.

In Nr. 2 ist $p = 1,\ q = \frac{1}{\lambda^2},\ r = \infty,\ s = o$. Folglich erhält man aus (3)

$$k^2 = \frac{1 - \frac{1}{\lambda^2}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = 1 - \lambda^2, \quad \text{also} \quad \lambda = k'.$$

Demnach aus (7)

$$\sin^2\varphi = z^2 = -\frac{\frac{1}{k'^2}}{1-\frac{1}{k'^2}}\cdot\frac{x-1}{x} = -\frac{1-v^2}{k^2v^2},$$

und wenn man auch

$$x = v^2 = \sin^2\psi$$

einführt,

$$\sin^2\varphi = -\frac{\cos^2\psi}{k^2\sin^2\psi},$$

sodass eine der beiden Grössen, φ oder ψ (z oder v), imaginär ist, wenn die andere reell; endlich liefert (6), da v und z gleichzeitig zunehmen.

$$(9)\quad . \quad . \quad \int\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} = \frac{1}{i}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Nun liegt v^2 zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{\lambda^2}$, d. h. zwischen 1 und $\frac{1}{k'^2}$, wenn z^2 zwischen o und 1 liegt, also erhält man

$$\int_1^{\frac{1}{k'}}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} = \frac{1}{i}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -iK,$$

also auch, wenn man k statt k' und dann ebenfalls K' statt K setzt.

$$(10)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = -iK'.$$

Nimmt man aber in (9) die obere Grenze unbestimmt, so hat man

$$\int_1^v\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} = \frac{1}{i}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

oder

$$\int_0^v\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} - K' = \frac{1}{i}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Setzt man also nun

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u,$$

sodass

$$z = \sin\varphi = \sin am\, u,$$

so wird

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} = -iu + K' \text{ und}$$

$$v = \sin\psi = \sin am\,(-iu + K', k').$$

Nun liefert die vierte der Formeln (5)

$$x = \frac{\frac{1}{k'^2}}{\frac{1}{k'^2} + \left(1 - \frac{1}{k'^2}\right) y} \quad \text{oder } v^2 = \frac{1}{1 - k^2 z^2}, \quad \sin\psi = \frac{1}{\Delta\varphi}.$$

Demnach wird

$$\sin am\,(-iu + K', k') = \frac{1}{\Delta\, am\, u}$$

oder

$$\sin am\,(iu + K) = \frac{1}{\Delta\, am\,(u, k')},$$

welches die erste der Formeln (18) § 10 ist.

Nr. 3 giebt $p = \frac{1}{\lambda^2}$, $q = \infty$, $r = o$, $s = 1$; also wird

$$k^2 = -\frac{-1}{\frac{1}{\lambda^2}};\ \lambda = k,$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

also weil v^2 zwischen $\frac{1}{k^2}$ und ∞ liegt, wenn z^2 zwischen o und 1 liegt,

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K.$$

Nimmt man die obere Grenze unbestimmt und zerlegt das Integral von o bis v in Integrale von o bis 1, von 1 bis $\frac{1}{k}$ und von $\frac{1}{k}$ bis v, so sieht man, dass man aus dieser Transformation die Formeln für das Argument $u \pm K \pm iK'$ erhalten wird.

Nr. 4 liefert $p = \infty$, $q = o$, $r = 1$, $s = \frac{1}{\lambda^2}$, damit ist

$$k^2 = \frac{\frac{1}{\lambda^2} - 1}{\frac{1}{\lambda^2}},\ \lambda = k',$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} = \frac{1}{i}\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

also durch Vertauschung von k mit k'

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\,(1-k^2v^2)}} = -\; iK'.$$

Um auch zu den oben benutzten Substitutionen

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\varDelta\psi} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = i\,\operatorname{tg}\psi$$

zu gelangen, betrachten wir noch Nr. 7 und 8 der obigen Tabelle.

In Nr. 7 ist $p = 1$, $q = o$, $r = \infty$, $s = \frac{1}{\lambda^2}$, also erhält man aus (3)

$k^2 = \lambda^2$ und aus (7) $\sin^2\varphi = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{x-1}{x-\frac{1}{k^2}}$, oder wenn man

$$x = \sin^2\psi$$

setzt,

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\varDelta\psi}.$$

In Nr. 8 ist

$$p = o,\; q = \infty,\; r = \frac{1}{\lambda^2},\; s = 1.$$

Damit wird

$$k^2 = 1 - \lambda^2,\; \lambda = k',\; \sin^2\varphi = \frac{x}{x-1} = -\operatorname{tg}^2\psi,$$
$$\sin\varphi = i\,\operatorname{tg}\psi.$$

Wir gehen nun zu der Untersuchung der Fälle über, in denen $\lambda^2 > 1$ ist, und betrachten zuerst Nr. 9 der obigen Tabelle. Hier ist

$$p = o,\; q = \frac{1}{\lambda^2},\; r = 1,\; s = \infty,$$

also wird

$$k^2 = \frac{1}{\lambda^2},\quad \lambda = \frac{1}{k};$$

ferner

$$y = z^2 = \sin^2\varphi = \lambda^2 x = \frac{1}{k^2}\,x = \frac{\sin^2\psi}{k^2}$$

und ebenso nach (7)

$$\cos^2\varphi = \frac{\frac{1}{\lambda^2} - x}{\frac{1}{\lambda^2}} = 1 - \lambda^2 x = 1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\psi = \Delta^2\left(\psi, \frac{1}{k}\right),$$

$$\Delta^2\varphi = 1 - x = \cos^2\psi$$

und folglich:

$$(11) \qquad \sin\psi = k\sin\varphi,\ \cos\psi = \Delta\varphi,\ \Delta\left(\psi, \frac{1}{k}\right) = \cos\varphi.$$

Endlich erhält man, da x und y von o an gleichzeitig wachsen,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}}$$

oder

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

Setzt man nun

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = u,$$

so wird

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = ku,$$

demnach

$$\sin\varphi = z = \sin am\, u,\ \sin\psi = v = \sin am\left(ku, \frac{1}{k}\right)$$

und dann aus (11)

$$\left.\begin{aligned} \sin am\left(ku, \frac{1}{k}\right) &= k \sin am\, u \\ \cos am\left(ku, \frac{1}{k}\right) &= \Delta\, am\, u \\ \Delta\, am\left(ku, \frac{1}{k}\right) &= \cos am\, u \end{aligned}\right\} (12)$$

wodurch die elliptischen Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ auf solche mit dem Modul k reducirt werden.

Um auch das vollständige Integral zwischen den Grenzen o und 1 zu erhalten, brauchen wir nur in unserem Schema nachzusehen, welche Werthe von z den Werthen o und 1 von v in

Nr. 9 entsprechen. Dies sind die Werthe o und $\frac{1}{k}$, demnach hat man

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$+ k\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und also nach Formel (10), je nach dem Zeichen, das man im zweiten Integrale der Wurzel giebt,

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)}} = k\,(K \pm iK').$$

Dies lässt sich auch so aussprechen: Geht k über in $\frac{1}{k}$, so geht K über in $k\,(K \pm iK')$.

Wir übergehen nun die genauere Untersuchung der Nummern 10—16, welche die übrigen Fälle, in denen $\lambda^2 > 1$ ist, enthalten, weil man die Resultate derselben auch erhalten kann, wenn man in (12) statt u die Argumente $u + K$, $u + iK'$ etc. substituirt, und überdies die Zusammenstellung dieser Formeln weniger wichtig ist.

Betrachten wir vielmehr die Fälle, in denen λ^2 negativ, also λ rein imaginär ist. Aber auch diese kann man unmittelbar erledigen, wenn man bedenkt, dass das Complement von $\frac{1}{k}$ rein imaginär ist. Man hat nämlich

$$\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = \sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}} = \frac{ik'}{k};$$

folglich ist $\frac{ik'}{k}$ das Complement des Moduls $\frac{1}{k}$. Nun haben wir früher (§ 8) gesehen, dass man zu den elliptischen Functionen mit complementärem Modul übergeht, wenn man das Argument rein imaginär werden lässt. Setzen wir daher zuerst in den Formeln (12) iu statt u, so ergiebt sich

$$\sin am\left(kiu, \frac{1}{k}\right) = k \sin am\,(iu, k)$$

$$\cos am\left(k\,iu,\ \frac{1}{k}\right) = \Delta\, am\,(iu,\ k)$$

$$\Delta\, am\left(k\,iu,\ \frac{1}{k}\right) = \cos am\,(iu,\ k)$$

$$\operatorname{tg} am\left(k\,iu,\ \frac{1}{k}\right) = \frac{k \sin am\,(iu,\ k)}{\Delta\, am\,(iu,\ k)},$$

und wendet man dann die Formeln (12) des § 8 an, indem nun $\frac{ik'}{k}$ das Complement von $\frac{1}{k}$ wird, so erhält man:

$$i \operatorname{tg} am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) = ik \operatorname{tg} am\,(u,\ k')$$

$$\frac{1}{\cos am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right)} = \frac{\Delta\, am\,(u,\ k')}{\cos am\,(u,\ k')}$$

$$\frac{\Delta\, am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right)}{\cos am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right)} = \frac{1}{\cos am\,(u,\ k')}$$

$$i \sin am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) = \frac{i\,k \sin am\,(u,\ k')}{\Delta\, am\,(u,\ k')}$$

und folglich:

$$\left.\begin{aligned}
\sin am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{k \sin am\,(u,\ k')}{\Delta\, am\,(u,\ k')}\\
\cos am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{\cos am\,(u,\ k')}{\Delta\, am\,(u,\ k')}\\
\Delta\, am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{1}{\Delta\, am\,(u,\ k')}\\
\operatorname{tg} am\left(ku,\ \frac{ik'}{k}\right) &= k \operatorname{tg} am\,(u, k').
\end{aligned}\right\}\quad (13)$$

Setzt man in der ersten dieser Formeln $u = K'$ und erinnert sich, dass (nach § 7) $am\ (K',\ k') = \frac{\pi}{2}$, also

$$\sin am\,(K', k') = 1, \quad \Delta\, am\,(K',\ k') = k$$

ist, so erhält man

$$\sin am\left(kK',\ \frac{ik'}{k}\right) = 1.$$

Geht man aber von der elliptischen Function zum elliptischen Integral über, so folgt, weil kK' das Argument und $\frac{ik'}{k}$ der Modul ist,

$$kK' = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}v^2\right)}}.$$

Demnach ist kK' der Werth des vollständigen Integrals für den Modul $\frac{ik'}{k}$. Mit Berücksichtigung des Früheren erhält man also folgendes Resultat:

Wenn k in $\frac{1}{k}$ übergeht,
so geht k' über in $\frac{ik'}{k}$,
ferner K in $k(K \pm iK')$
und K' in kK'.

Siebenter Abschnitt.

Das Additionstheorem.

---

§ 25.

Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Eigenschaft der elliptischen Integrale über, welche historisch der Ausgangspunct für die Entwickelung der Theorie gewesen ist, zu dem sogenannten Additionstheorem. Dieses lässt sich, vorerst allerdings noch in beschränkter Weise, folgendermassen aussprechen. „Wenn man zwei elliptische Integrale erster Gattung mit gleichem Modul addirt, so ist ihre Summe wiederum ein elliptisches Integral mit dem gleichen Modul, und zwar so, dass die obere Grenze des letzteren Integrals eine algebraische Function der oberen Grenzen der beiden ersten Integrale ist.“ Oder, wendet man die Legendre'sche Bezeichnung an, so kann man sagen: Die Summe der beiden Integrale $F(\varphi)$ und $F(\psi)$ ist einem solchen dritten Integrale $F(\sigma)$ gleich, dass zwischen den trigonometrischen Functionen der drei Amplituden φ, ψ und σ eine einfache algebraische Relation besteht. Daraus wird sich dann ergeben, dass die elliptischen Functionen der Summe zweier Argumente auf ein-

fache Weise algebraisch durch die elliptischen Functionen der einzelnen Argumente ausgedrückt werden können.

Diesen Satz entdeckte zuerst Fagnano*) an dem speciellen Integral, welches den Bogen der Lemniscate ausdrückt (§ 16) und lehrte dadurch die Bögen dieser Curve addiren. Alsdann bewies denselben Euler**) für das allgemeine elliptische Integral der ersten Gattung, und Lagrange***) gab später eine sehr elegante Ableitung dieses Theorems, wodurch er Euler's Bewunderung in hohem Grade auf sich zog.

Es wird zum Verständniss des Folgenden förderlich sein, wenn wir dieselben Betrachtungen, die uns zu dem Additionstheoreme führen werden, zuerst in der Trigonometrie anstellen und dadurch auf einem von dem gewöhnlichen ganz verschiedenen Wege zu der bekannten Fundamentalformel der Trigonometrie gelangen. Um aber zunächst diesen einzuschlagenden Weg erst auszumitteln, gehen wir von letzterer, nämlich von der bekannten Formel

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

aus. Aus derselben ergiebt sich die entsprechende Formel für die Arcus Sinus, wenn man

$$\sin u = x, \quad \sin v = y,$$

also

$$\cos u = \sqrt{1-x^2}, \quad \cos v = \sqrt{1-y^2},$$

und ausserdem noch

$$c = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

setzt,

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin } c.$$

Drückt man nun die Arcus Sinus durch die sie darstellenden Integrale aus, so lässt sich die vorige Gleichung so schreiben

$$(1) \quad \ldots \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}.$$

---

*) Fagnano de Fagnani. Legendre citirt: Produzioni matematiche. 1750. Ausserdem findet sich in Poggendorff's Wörterbuch angegeben: Metodo per misurare la lemniscata (Giorn. de Letterat. 1718). Ich habe mir keines von beiden verschaffen können.

**) Euler. Institutiones calculi integralis. I. Sect. 2. Cap. 6.

***) Lagrange. Théorie des fonctions. I. § 79 ff.

Daraus erhellt, dass das Integral, das den Arcus Sinus darstellt, die im Additionstheoreme ausgesprochene Eigenschaft besitzt: dass nämlich die Summe zweier solcher Integrale einem dritten ähnlichen Integrale gleich ist, von der Beschaffenheit, dass die obere Grenze c des letzteren eine algebraische Function der oberen Grenzen x und y der beiden ersten Integrale ist, nämlich

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad c = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Nun ist aber die Gleichung (1) nichts anderes, als das vollständige Integral von folgender Differentialgleichung

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = o,$$

und c die willkürliche Constante der Integration. Denn integrirt man diese Differentialgleichung Glied für Glied, und nimmt eine willkürliche Constante C so, dass die unteren Grenzen der beiden Integrale Null sind, so erhält man

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C.$$

Die Constante C kann man aber durch eine andere Constante c ersetzen. In der Differentialgleichung (3) ist nämlich jede der beiden Veränderlichen x und y als eine Function der anderen zu betrachten; jedem Werthe der einen entspricht daher ein Werth der anderen. Bezeichnet man nun mit c denjenigen Werth von y, welcher dem Werthe $x = o$ entspricht, und setzt diese Werthe in die Integralgleichung (4) hinein, so erhält man, weil für $x = o$ das erste Glied verschwindet,

$$C = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

und damit die Gleichung (1).

Die Gleichung (2), die die Relation zwischen den oberen Grenzen der drei Integrale ausspricht, ist aber auch nichts anderes, als eine vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung (3); denn sie ist eine endliche Gleichung zwischen den Variabeln x und y der Differentialgleichung und enthält eine willkürliche Constante c, die in der Differentialgleichung nicht enthalten ist. Jede endliche Gleichung aber zwischen den Variabeln einer Differentialgleichung, die so viele willkürliche Constan-

ten enthält, als die Ordnung der Differentialgleichung Einheiten hat, ist eine vollständige Integralgleichung der letzteren.

Hieraus geht nun hervor, dass man die Gleichung (2) wieder erhalten wird, wenn es gelingt, die Differentialgleichung (3) anders als durch gliedweise Quadratur zu integriren. Hat man die Gleichung (2) aber gefunden, so folgt aus ihr in Verbindung mit (1) auch umgekehrt wieder die Fundamentalformel der Trigonometrie.

Es darf nicht befremden, dass bei dieser Betrachtung die Grösse c als eine willkürliche Constante auftritt. Sie ist in der That nur in so fern constant, als nach ihr in der Differentialgleichung nicht differentiirt ist, im Uebrigen ist sie veränderlich. In Jacobi's grosser Abhandlung über die Differentialgleichungen*) findet sich eine Stelle, die in Beziehung auf diesen Punct ebenso treffend als lehrreich ist. Es sei daher erlaubt, dieselbe hier anzuführen. Sie lautet in der Uebersetzung so: „Es ist ein sehr wichtiger Satz der Differentialrechnung, dass Functionen, welche durch Differentialgleichungen bestimmt werden, immer mehr Variable enthalten können, als die Differentialgleichungen, aus welchen sie bestimmt werden. Diese Variabeln, welche zu denjenigen hinzukommen, die in den Differentialgleichungen enthalten sind, werden von den Analytikern willkürliche Constanten genannt; Constanten nämlich, weil auf ihre Veränderlichkeit in den gegebenen Differentialgleichungen keine Rücksicht genommen wird, und willkürlich, weil sie nicht zu denjenigen constanten Grössen gehören, die in den gegebenen Differentialgleichungen vorkommen. Man sieht aber in einer Differentialgleichung jede Grösse als constant an (obgleich sie sonst veränderlich sein kann), nach welcher in jenen Gleichungen keine Differentiation vorgenommen ist."

Wir wollen uns nun für einen Augenblick in der Trigonometrie auf denjenigen Standpunct stellen, den wir in der Theorie der elliptischen Functionen gegenwärtig einnehmen. Wir wollen also den Zusammenhang der trigonometrischen Functionen mit den cyclometrischen Integralen und daher auch die Differential-

*) Jacobi. Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis. Crelle's Journ. Bd. 23. p. 5.

quotienten jener als bekannt annehmen.*) Dagegen wollen wir die Fundamentalformel, mittelst welcher die trigonometrischen Functionen einer Summe $u + v$ durch die Functionen der einzelnen Argumente u und v ausgedrückt werden, nicht als bekannt voraussetzen, sondern diese erst durch die Integration der Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

ableiten.

Es ist oben schon gezeigt worden, dass aus dieser Gleichung die folgende:

$$(4) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

sich ergiebt, in welcher die willkürliche Constante c so definirt ist, dass mit c derjenige Werth von y bezeichnet wird, welcher dem Werthe $x = 0$ entspricht.

Indem wir nun die Lagrange'sche Methode auf die vorliegende einfachere Differentialgleichung anwenden, sehen wir x, und also auch y, als eine Function einer neuen Variablen t an, indem wir setzen

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}.$$

Dann folgt, weil y eine Function von x, x aber eine Function von t ist,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

*) Definirt man nämlich die Function Sinus als die obere Grenze eines Integrals, sodass, wenn

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u$$

gesetzt wird, $x = \sin u$ ist, und führt man ausserdem den Cosinus als eine durch die Beziehung $\cos u = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u}$ daraus abgeleitete Function ein, so erhält man

$$\frac{d \sin u}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2} = \cos u,$$

$$\frac{d \cos u}{du} = \frac{d \cos u}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} = -x$$

$$= -\sin u.$$

mithin

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{1-y^2}. \tag{6}$$

Indem man die Gleichungen (5) und (6) quadrirt und nochmals nach t differentiirt, erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y, \tag{7}$$

wodurch die eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen y und x auf zwei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen resp. x und t, und y und t zurückgeführt ist. Die letzteren Differentialgleichungen sind linear und homogen, es genügt also, zwei particuläre Lösungen derselben zu kennen, um daraus die vollständigen Lösungen zu erhalten. Es sind aber $\sin t$ und $\cos t$ particuläre Lösungen, da

$$\frac{d^2 \cos t}{dt^2} = -\cos t, \quad \frac{d^2 \sin t}{dt^2} = -\sin t$$

ist. Bezeichnen daher a, b, a', b' vier willkürliche Constanten, so sind

$$x = a \sin t + b \cos t, \quad y = a' \sin t + b' \cos t \tag{8}$$

die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

Dadurch ist die Integration vollbracht, nämlich x und y als Functionen von t ausgedrückt. Eliminirt man aus diesen Gleichungen t, so erhält man auch eine Relation zwischen y und x. Wir haben aber damit noch etwas Zweites zu verbinden. Durch die Reduction der gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung auf zwei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung haben wir nämlich drei überflüssige Constanten erhalten; es müssen sich also von den vier Grössen a, b, a', b' drei durch eine derselben oder, was dasselbe ist, alle vier durch irgend eine neue fünfte ausdrücken lassen. Zu dieser wählen wir die früher eingeführte Constante c.

Zunächst ergiebt sich aus den Gleichungen (8)

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t - b \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a' \cos t - b' \sin t \tag{9}$$

und, wenn man diese Werthe in die Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = 1, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = 1,$$

die unmittelbar aus (5) und (6) folgen, substituirt,

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 = 1. \tag{10}$$

Ferner erhält man durch Auflösung der Gleichungen (8)

$$\sin t = \frac{b'x - by}{ab' - a'b}, \quad \cos t = \frac{ay - a'x}{ab' - a'b},$$

und wenn man diese Werthe in (9) substituirt und die Gleichungen (5) und (6) nochmals benutzt,

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{a(ay - a'x)}{ab' - a'b} - \frac{b(b'x - by)}{ab' - a'b}$$

$$-\sqrt{1 - y^2} = \frac{a'(ay - a'x)}{ab' - a'b} - \frac{b'(b'x - by)}{ab' - a'b},$$

oder mit Rücksicht auf die Relationen (10)

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{y}{ab' - a'b} - \frac{(aa' + bb')x}{ab' - a'b},$$

$$-\sqrt{1 - y^2} = \frac{(aa' + bb')y}{ab' - a'b} - \frac{x}{ab' - a'b},$$

oder endlich, wenn man

$$\frac{1}{ab' - a'b} = A, \quad \frac{aa' + bb'}{ab' - a'b} = B$$

setzt,

$$\sqrt{1 - x^2} = Ay - Bx; \quad -\sqrt{1 - y^2} = By - Ax,$$

sodass jetzt nur noch A und B durch c auszudrücken sind. Setzt man nun aber in den letzten Gleichungen $x = o$ und $y = c$, so erhält man

$$A = \frac{1}{c}, \quad B = -\frac{\sqrt{1 - c^2}}{c}$$

und dann

$$c\sqrt{1 - x^2} = y + x\sqrt{1 - c^2}; \quad c\sqrt{1 - y^2} = y\sqrt{1 - c^2} + x,$$

woraus sich

$$c = \frac{y^2 - x^2}{y\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - y^2}},$$

und wenn man bedenkt, dass

$$y^2 - x^2 = y^2(1 - x^2) - x^2(1 - y^2)$$

ist,

$$c = y\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - y^2}$$

ergiebt. Dies ist das gesuchte Integral der Differentialgleichung (3), aus dem sofort die Fundamentalformel der Trigonometrie folgt. Denn setzt man

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = v,$$



so folgt aus (1)

$$\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} = u + v.$$

Betrachtet man aber nun x als Function von u, so ist

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad c = \sin(u + v),$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos u, \quad \sqrt{1 - y^2} = \cos v;$$

mithin erhält man wirklich

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u.$$

§ 26.

Genau den im vorigen §. angedeuteten Weg hat man nun auch bei den elliptischen Functionen eingeschlagen. Die erste wichtige Eigenschaft, die in Bezug auf die elliptischen Integrale zu Tage trat, bestand darin, dass es Euler gelang, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}} = o,$$

die, gliedweise integrirt, auf elliptische Integrale führt, und die wir deshalb kurz die elliptische Differentialgleichung nennen wollen, auf andere Weise durch eine algebräische Relation zu integriren und dadurch zu erweisen, dass zwischen den oberen Grenzen dreier elliptischer Integrale, von denen eines die Summe der beiden anderen ist, eine algebraische Beziehung stattfindet. Wie schon bemerkt, hat Lagrange eine einfachere Integrationsmethode der obigen Differentialgleichung gegeben und auch gezeigt, dass diese Integration besonders elegant wird, wenn man die elliptischen Differentiale zuvor auf die Normalform reducirt. Wir wollen daher von dieser letzteren ausgehen und die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = o$$

behandeln.

Integrirt man diese Gleichung zuerst gliedweise, indem man die willkürliche Constante C so wählt, dass die Integrale von o anfangen, und bedient sich der Legendre'schen Bezeichnung, so erhält man

$$F(\varphi) + F(\psi) = C,$$

und ersetzt man wieder die Constante C durch eine andere σ, welche dadurch definirt sei, dass $\psi = \sigma$ werde, wenn man $\varphi = o$ setzt, so ergiebt sich, da $F(o) = o$ ist, $C = F(\sigma)$ und daher

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma),$$

und es gilt jetzt, die Relation zwischen φ, ψ und σ zu finden.

Lagrange sieht φ und ψ als Functionen einer neuen Variablen t an, die er durch die Gleichung

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

definirt, aus welcher, wie im vorigen §

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

folgt. Durch Quadrirung und nochmaliges Differentiiren nach t ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2 \sin \psi \cos \psi$$
$$= -\tfrac{1}{2} k^2 \sin 2\varphi, \qquad\qquad = -\tfrac{1}{2} k^2 \sin 2\psi.$$

Nun führt Lagrange statt φ und ψ die Summe und Differenz dieser Grössen ein, indem er setzt

$$\varphi + \psi = p, \quad \varphi - \psi = q;$$

dann ergiebt sich durch Addition und Subtraction der vorigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} &= -\tfrac{1}{2}k^2 (\sin(p+q) + \sin(p-q)) = -k^2 \sin p \cos q \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= -\tfrac{1}{2}k^2 (\sin(p+q) - \sin(p-q)) = -k^2 \cos p \sin q \end{aligned}\right\} (13)$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt ebenso

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \end{aligned}\right\} (14)$$

deren Product die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} &= -k^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi) \\ &= -k^2 \sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi) \\ &= -k^2 \sin p \sin q \end{aligned}$$

liefert. Indem man nun mit dieser Gleichung in die Gleichungen (13) hineindividirt, erhält man integrable Ausdrücke, nämlich

$$\frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos q}{\sin q} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}} = \frac{\cos q \cdot \frac{dq}{dt}}{\sin q}$$

$$\frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p}{\sin p} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{\cos p \cdot \frac{dp}{dt}}{\sin p}$$

folglich, wenn die Integrations-Constanten mit $\log\alpha$ und $\log\beta$ bezeichnet werden,

$$(15) \quad . \quad \begin{cases} \log\frac{dp}{dt} = \log.\sin q + \log\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dt} = \alpha\,.\,\sin q \\ \log\frac{dq}{dt} = \log.\sin p + \log\beta \quad \text{oder} \quad \frac{dq}{dt} = \beta\,.\,\sin p. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit

$$\frac{dq}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt},$$

woraus

$$\alpha \sin q \frac{dq}{dt} = \beta \sin p \frac{dp}{dt}$$

folgt, so kann man aufs Neue integriren, wobei zugleich t eliminirt wird; denn bezeichnet γ eine dritte Integrations-Constante, so erhält man

$$-\alpha\cos q = -\beta\cos p + \gamma,$$

und es handelt sich nur noch darum, die Constanten α, β und γ durch die vorhin gewählte σ auszudrücken. Indem man wieder $q = \varphi - \psi$ und $p = \varphi + \psi$ in die vorige Gleichung zurücksubstituirt, kann man diese schreiben:

$$(16) \quad . \quad . \quad -\alpha\cos(\varphi - \psi) = -\beta\cos(\varphi + \psi) + \gamma,$$

und setzt man darin $\varphi = o$ und $\psi = \sigma$, so ergiebt sich zunächst

$$\gamma = (\beta - \alpha)\cos\sigma.$$

Um auch α und β durch σ auszudrücken, kehren wir zu den Gleichungen (14) zurück, die sich mit Hülfe der Gleichungen (15) so schreiben lassen:

$$(17) \quad . \quad \begin{cases} \alpha\sin(\varphi - \psi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \\ \beta\sin(\varphi + \psi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen wieder $\varphi = o$ und $\psi = \sigma$, so erhält man

$$-\alpha\,.\,\sin\sigma = 1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}$$

$$\beta\,.\,\sin\sigma = 1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\sigma}$$

also, wenn man das Zeichen Δ wieder einführt,

$$\alpha = \frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}, \quad \beta = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}, \quad \gamma = \frac{2\cos\sigma}{\sin\sigma}.$$

Diese Werthe nun in (16) substituirt, geben dieser Gleichung die Gestalt

$$-\frac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}\cos(\varphi - \psi) + \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\cos(\varphi + \psi) = \frac{2\cos\sigma}{\sin\sigma}$$

oder

$$\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi) - (\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi))\,\Delta\sigma$$
$$= 2\cos\sigma,$$

also

$$\cos\sigma = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\Delta\sigma.$$

Dieses ist die berühmte Lagrange'sche Formel, die die Beziehung zwischen den Grössen φ, ψ und σ enthält. Das Additionstheorem für die elliptischen Integrale der ersten Gattung lässt sich nun so aussprechen:

„Wenn

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma)$$

ist, so ist auch

$$\cos\sigma = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\Delta\sigma \qquad (18)$$

und umgekehrt."

In einer einzigen für sich allein selbständig dastehenden Formel ausgedrückt aber erhält man das Additionstheorem, wenn man zu den elliptischen Functionen übergeht. Denn setzt man $F(\varphi) = u$, $F(\psi) = v$, so wird $F(\sigma) = u + v$, und da alsdann ferner $\varphi = am\,u$, $\psi = am\,v$, $\sigma = am\,(u + v)$ ist, so giebt die gefundene Gleichung zwischen φ, ψ und σ folgende Beziehung zwischen $am\,(u + v)$, $am\,u$ und $am\,v$

$$\left.\begin{aligned}\cos am\,(u + v) &= \cos am\,u\,\cos am\,v \\ &- \sin am\,u\,\sin am\,v\,\Delta am\,(u + v)\end{aligned}\right\}\ (19).$$

Ganz in derselben Weise, wie die Beziehung zwischen φ, ψ und σ gefunden wurde, könnte man auch, wenn man

$$F(\varphi) - F(\psi) = F(\theta)$$

setzt, die entsprechende Beziehung zwischen φ, ψ und θ finden. Sie ergiebt sich aber auch unmittelbar aus der vorigen. Da nämlich $-F(\psi) = F(-\psi)$ ist, so kann man $F(\theta)$ auch als die Summe zweier Integrale darstellen, nämlich

$$F(\varphi) + F(-\psi) = F(\theta),$$

und erhält daher, wenn man $-\psi$ an die Stelle von ψ, und θ an die Stelle von σ setzt,

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta\theta,$$

und da

$$F(\theta) = u - v, \quad \text{also} \quad \theta = am\,(u-v) \text{ ist,}$$

$$\cos am\,(u-v) = \cos am\,u \cos am\,v + \sin am\,u \sin am\,v\;\varDelta\,am\,(u-v),$$

welche Gleichung sich auch aus (19) ergiebt, wenn man $-v$ an die Stelle von v setzt.

§ 27.

Aus den im vorigen § gewonnenen Resultaten lassen sich nun leicht die Fundamentalformeln für die elliptischen Functionen, nämlich die Ausdrücke für $\sin am\,(u \pm v)$, $\cos am\,(u \pm v)$, $\varDelta\,am\,(u \pm v)$ durch u und v allein, ableiten. Um die Rechnung dabei möglichst abzukürzen und namentlich irrationale Ausdrücke zu vermeiden, stelle man folgende Betrachtung an: Aus den Gleichungen (18) kann man durch Umstellung zwei andere Gleichungen finden, nämlich aus

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma)$$

folgt

$$F(\psi) - F(\sigma) = -F(\varphi)$$

und

$$F(\sigma) - F(\varphi) = F(\psi),$$

welche Gleichungen sich auch schreiben lassen

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma)$$
$$F(\psi) + F(-\sigma) = F(-\varphi)$$
$$F(\sigma) + F(-\varphi) = F(\psi).$$

Da nun das Integral zur Rechten jedesmal die Summe der beiden Integrale zur Linken ist, so wird man auch aus (18) zwei neue Gleichungen erhalten, wenn man an die Stelle von

$$\varphi, \quad \psi, \quad \sigma$$

einmal

$$\psi, \quad -\sigma, \quad -\varphi$$

und dann

$$\sigma, \quad -\varphi, \quad \psi$$

setzt. Dadurch erhält man die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta\sigma\\ \cos\varphi &= \cos\psi\cos\sigma + \sin\psi\sin\sigma\,\varDelta\varphi\\ \cos\psi &= \cos\sigma\cos\varphi + \sin\sigma\sin\varphi\,\varDelta\psi\end{aligned}\right\}\ (20)$$

welche zwar alle drei dasselbe besagen, mit Hülfe derer man aber $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta\sigma$ durch φ und ψ ausdrücken kann. Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$(21)\qquad \sin\sigma = \frac{\cos^2\psi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)(\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{\sin^2\varphi\cos^2\psi\,\Delta^2\psi - \sin^2\psi\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist aber

$$= \sin^2\varphi\cos^2\psi\,(1-k^2\sin^2\psi) - \sin^2\psi\cos^2\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)$$

$$= \sin^2\varphi\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos^2\varphi - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\,(\cos^2\psi - \cos^2\varphi)$$

$$= (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi).$$

Mithin wird

$$(22)\qquad \sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Ferner ergiebt sich aus den nämlichen Gleichungen

$$\cos\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\psi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \frac{(\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\psi - \sin\psi\cos\psi\,\Delta\varphi)(\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks schreibt sich:

$$= \sin^2\varphi\cos\varphi\cos\psi\,(1-k^2\sin^2\psi) - \sin^2\psi\cos\varphi\cos\psi\,(1-k^2\sin^2\varphi)$$
$$- \sin\varphi\sin\psi\,(\cos^2\psi - \cos^2\varphi)\,\Delta\varphi\,\Delta\psi$$

$$= (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi).$$

Also ist

$$(23)\qquad \cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Endlich liefert die erste der Gleichungen (20)

$$\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \cos\sigma.$$

Substituirt man darin den eben gefundenen Ausdruck für $\cos\sigma$, so wird

$$\sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma = \frac{-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

mithin

$$(24)\quad .\ .\quad \Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Setzt man nun in den Formeln (22), (23) und (24)

$$\varphi = am\,u,\quad \psi = am\,v,\quad \sigma = am\,(u+v),$$

so erhält man die Fundamentalformeln für die elliptischen Functionen, wenn man zugleich auch $-v$ an Stelle von v setzt,

$$(25)\begin{cases} \sin am\,(u \pm v) = \dfrac{\sin am\,u \cos am\,v\; \varDelta\, am\,v \pm \sin am\,v \cos am\,u\; \varDelta\, am\,u}{1-k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v} \\[2ex] \cos am\,(u \pm v) = \dfrac{\cos am\,u \cos am\,v \mp \sin am\,u \sin am\,v\; \varDelta\, am\,u\; \varDelta\, am\,v}{1-k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v} \\[2ex] \varDelta\, am\,(u \pm v) = \dfrac{\varDelta\, am\,u\; \varDelta\, am\,v \mp k^2 \sin am\,u \cos am\,u \sin am\,v \cos am\,v}{1-k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}. \end{cases}$$

Diese Relationen sind den trigonometrischen Formeln

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \sin v \cos u$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

analog, und, wie es sein muss, entstehen die letzteren unmittelbar aus jenen, wenn man $k = o$ setzt, weil dann die Amplituden in ihre Argumente übergehen, und die Functionen $\varDelta$ sämmtlich den Werth Eins erhalten.

§ 28.

Es wird nicht unzweckmässig sein, hier auch noch den Beweis für die Richtigkeit der Fundamentalformeln beizubringen, den Abel*) in seiner ersten Abhandlung über die elliptischen Functionen für dieselben giebt.

Abel geht von dem im vorigen § abgeleiteten Ausdrucke für $\sin am\,(u+v)$ aus und zeigt, dass derselbe gleich $\sin am\,(u+v)$ sein müsse. Es sei also

$$X = \frac{\sin am\,u \cos am\,v\; \varDelta\, am\,v + \sin am\,v \cos am\,u\; \varDelta\, am\,u}{1-k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}.$$

Dann ist X eine Function von u und v und zwar eine symmetrische Function, daher kann man setzen

$$X = f(u, v) = f(v, u).$$

Es lässt sich aber zeigen, dass auch der partielle Differentialquotient $\frac{\partial X}{\partial u}$ eine symmetrische Function von u und v ist. Setzt man der Kürze wegen

$$1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v = N,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{N[\cos am\,u\; \varDelta\, am\,u \cos am\,v\; \varDelta\, am\,v - \sin am\,v \sin am\,u\; \varDelta^2 am\,u}{N^2}$$
$$\frac{-k^2 \sin am\,v \sin am\,u \cos^2 am\,u]}{N^2}$$
$$+ \frac{(\sin am\,u \cos am\,v\; \varDelta\, am\,v + \sin am\,v \cos am\,u\; \varDelta\, am\,u)\, 2k^2 \sin am\,u \cos am\,u\; \varDelta\, am\,u \sin^2 am\,v}{N^2}.$$

*) Abel. Recherches sur les fonctions elliptiques. Crelle's Journ. Bd. 2.

Da es nur darauf ankommt, nachzuweisen, dass dieser Ausdruck in Bezug auf u und v symmetrisch ist, so kann man alles dasjenige, was schon in sich symmetrisch ist, ausscheiden und nur das Uebrigbleibende weiter behandeln. Der Ausdruck besteht aus 5 Gliedern, von welchen das erste und vierte symmetrisch sind, der Ausdruck N ist ebenfalls symmetrisch; es bleibt also zur weiteren Umformung folgender Ausdruck übrig:

$$- N \sin am\, v \sin am\, u\, \Delta^2 am\, u - Nk^2 \sin am\, u \sin am\, v \cos^2 am\, u$$
$$+ 2k^2 \sin am\, u \sin^3 am\, v \cos^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u,$$

aus welchem wir noch den allen Gliedern gemeinsamen symmetrischen Factor $\sin am\, u \sin am\, v$ ausscheiden können. Dann behält man, wenn man den Ausdruck für N wieder herstellt,

$$\begin{aligned} &- (1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)\, \Delta^2 am\, u \\ &- (1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)\, k^2 \cos^2 am\, u \\ &+ 2k^2 \sin^2 am\, v \cos^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u \\ = &- \Delta^2 am\, u + k^2 \sin^2 am\, v\, \Delta^2 am\, u - k^2 \cos^2 am\, u \\ &+ k^2 \sin^2 am\, v \cos^2 am\, u\, (k^2 \sin^2 am\, u + \Delta^2 am\, u) \\ = &- \Delta^2 am\, u\, \Delta^2 am\, v - k^2 \cos^2 am\, u \cos^2 am\, v. \end{aligned}$$

Die nach Ausscheidung aller symmetrischen Glieder übrig bleibenden sind daher ebenfalls symmetrisch, mithin ist der ganze Ausdruck symmetrisch. Demnach muss die Function X so beschaffen sein, dass

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v}$$

ist. Alsdann aber muss X eine Function von $u + v$ sein. Denn differentiirt man die Function X vollständig nach u und v, so erhält man

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u}\, du + \frac{\partial X}{\partial v}\, dv,$$

und vermöge der Bedingung (26), wenn man $u + v = z$ setzt,

$$(27) \quad \ldots \quad dX = \frac{\partial X}{\partial u}\, dz.$$

Eliminirt man aber v aus X, indem man $v = z - u$ einführt und differentiirt unter dieser Voraussetzung wieder vollständig, so erhält man

$$(28) \quad \ldots \quad dX = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) du,$$

wo die Klammern andeuten sollen, dass man vor der Differen-

tiation v durch $z - u$ zu ersetzen habe. Aus der Verbindung von (27) und (28) folgt dann

$$\left[\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial X}{\partial u}\right] dz + \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) du = o,$$

und weil u und z von einander ganz unabhängig sind,

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) = o, \quad \frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Hieraus geht hervor, dass X nach der Substitution von $z - u$ für v die Variable u nicht mehr explicite enthalten kann, dass vielmehr dann

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz,$$

also X eine Function von z oder $u + v$ allein ist. Man kann also setzen

$$X = f(u + v).$$

Um aber zu ermitteln, was die Function f bedeutet, braucht man nur $v = o$ zu setzen, denn dann erhält man

$$f(u) = \sin am\, u,$$

folglich ist auch

$$X = f(u + v) = \sin\, am\, (u + v).$$

§ 29.

Die im § 27 unter (25) aufgestellten Fundamentalformeln bilden die Quelle für eine Menge analytischer Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen, gerade wie auch die trigonometrischen Formeln sich aus den Ausdrücken für $\sin(u \pm v)$ und $\cos(u \pm v)$ ergeben.

Wir stellen die wichtigsten derselben im Folgenden zusammen, indem wir den in den Fundamenten*) angegebenen nur wenige hinzufügen. Zur Abkürzung sei $am\, u = a$, $am\, v = b$, $am\,(u + v) = \sigma$, $am\,(u - v) = \theta$ gesetzt.

$$1)\quad \sin am\, 2u = \frac{2 \sin a \cos a \Delta a}{1 - k^2 \sin^4 a}$$

$$2)\quad \cos am\, 2u = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^4 a}$$

*) Jacobi. Fundamenta nova etc. § 18.

3) $\Delta\, am\, 2u = \frac{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 a \cos^2 a}{1 - k^2 \sin^4 a}$

4) $\sin\sigma + \sin\theta = \frac{2 \sin a \cos b\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

5) $\sin\sigma - \sin\theta = \frac{2 \sin b \cos a\, \Delta a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

6) $\cos\sigma + \cos\theta = \frac{2 \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

7) $\cos\sigma - \cos\theta = -\frac{2 \sin a \sin b\, \Delta a\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

8) $\Delta\sigma + \Delta\theta = \frac{2\, \Delta a\, \Delta b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

9) $\Delta\sigma - \Delta\theta = -\frac{2k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

10) $\sin\sigma \sin\theta = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

11) $\cos\sigma \cos\theta = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

12) $\Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{\Delta^2 a - k^2 \cos^2 a \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

13) $1 + \sin\sigma \sin\theta = \frac{\cos^2 b + \sin^2 a\, \Delta^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

14) $1 - \sin\sigma \sin\theta = \frac{\cos^2 a + \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

15) $1 + k^2 \sin\sigma \sin\theta = \frac{\Delta^2 b + k^2 \sin^2 a \cos^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

16) $1 - k^2 \sin\sigma \sin\theta = \frac{\Delta^2 a + k^2 \sin^2 b \cos^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

17) $1 + \cos\sigma \cos\theta = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

18) $1 - \cos\sigma \cos\theta = \frac{\sin^2 a\, \Delta^2 b + \sin^2 b\, \Delta^2 a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

19) $1 + \Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{\Delta^2 a + \Delta^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

20) $1 - \Delta\sigma\, \Delta\theta = \frac{k^2 (\sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a)}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

21) $(1 \pm \sin\sigma)(1 \pm \sin\theta) = \frac{(\cos b \pm \sin a\, \Delta b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

22) $(1 \pm \sin\sigma)(1 \mp \sin\theta) = \frac{(\cos a \pm \sin b\, \Delta a)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

23) $(1 \pm k \sin\sigma)(1 \pm k \sin\theta) = \frac{(\Delta b \pm k \sin a \cos b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$

$$24)\quad (1 \pm k\sin\sigma)(1 \mp k\sin\theta) = \frac{(\varDelta a \pm k\sin b\cos a)^2}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$25)\quad (1 \pm \cos\sigma)(1 \pm \cos\theta) = \frac{(\cos a \pm \cos b)^2}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$26)\quad (1 \pm \cos\sigma)(1 \mp \cos\theta) = \frac{(\sin a\,\varDelta b \mp \sin b\,\varDelta a)^2}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$27)\quad (1 \pm \varDelta\sigma)(1 \pm \varDelta\theta) = \frac{(\varDelta a \pm \varDelta b)^2}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$28)\quad (1 \pm \varDelta\sigma)(1 \mp \varDelta\theta) = \frac{k^2\sin^2(a \mp b)}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$29)\quad \sin\sigma\cos\theta = \frac{\sin a\cos a\,\varDelta b + \sin b\cos b\,\varDelta a}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$30)\quad \cos\sigma\sin\theta = \frac{\sin a\cos a\,\varDelta b - \sin b\cos b\,\varDelta a}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$31)\quad \sin\sigma\,\varDelta\theta = \frac{\cos b\sin a\,\varDelta a + \cos a\sin b\,\varDelta b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$32)\quad \varDelta\sigma\sin\theta = \frac{\cos b\sin a\,\varDelta a - \cos a\sin b\,\varDelta b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$33)\quad \cos\sigma\cdot\varDelta\theta = \frac{\cos a\cos b\,\varDelta a\varDelta b - k'^2\sin a\sin b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$34)\quad \varDelta\sigma\cos\theta = \frac{\cos a\cos b\,\varDelta a\,\varDelta b + k'^2\sin a\sin b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$35)\quad \sin(\sigma+\theta) = \frac{2\sin a\cos a\,\varDelta b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$36)\quad \sin(\sigma-\theta) = \frac{2\sin b\cos b\,\varDelta a}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$37)\quad \cos(\sigma+\theta) = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a\,\varDelta^2 b}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

$$38)\quad \cos(\sigma-\theta) = \frac{\cos^2 b - \sin^2 b\,\varDelta^2 a}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}.$$

Zur Erläuterung der Ableitung dieser Formeln mögen folgende Bemerkungen dienen. Im Allgemeinen werden sie auf dieselbe Weise gebildet, wie die trigonometrischen. Bei den Umformungen wiederholen sich bisweilen die schon im § 27 zur Ableitung der Formeln (22), (23) und (24) ausgeführten Operationen, auch kann man sich dazu der Gleichungen (20) desselben § bisweilen mit Nutzen bedienen. Die Formeln 21) bis 28) entstehen leicht aus den vorhergehenden, wenn man nur bemerkt, dass z. B.

$$(1 \pm \sin\sigma)(1 \pm \sin\theta) = 1 + \sin\sigma\sin\theta \pm (\sin\sigma + \sin\theta)$$

ist, und in 13) und 4) schon Ausdrücke für

$$1 + \sin\sigma \sin\theta \quad \text{und} \quad \sin\sigma + \sin\theta$$

gegeben sind, die man also nur durch Addition und Subtraction zu verbinden hat.

Zu diesen Mitteln, die der Ableitung der trigonometrischen wie der elliptischen Formeln gemeinsam sind, kommt aber noch eines, welches den elliptischen Functionen eigenthümlich ist, nämlich die Substitution der Argumente $u + K$, $u + iK'$ etc. an die Stelle von u. Um die Anwendbarkeit dieses Verfahrens an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Formeln 11) und 12) aus 10) ableiten.

Zu diesem Ende setzen wir in der Formel 10) nämlich in

$$\sin\sigma \sin\theta = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$u + K$ an die Stelle von u und bedienen uns der Formel (17) § 10, nämlich

$$\sin am\,(z + K) = \frac{\cos am\, z}{\Delta\, am\, z};$$

dann haben wir folgende Substitutionen zu machen:

$$\begin{array}{lcl} u & \text{geht über in} & u + K \\ v & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & v \\ u + v & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & u + v + K \\ u - v & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & u - v + K \\ \sin\sigma & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & \dfrac{\cos\sigma}{\Delta\sigma} \\ \sin\theta & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & \dfrac{\cos\theta}{\Delta\theta} \\ \sin a & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & \dfrac{\cos a}{\Delta a} \\ \sin b & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & \sin b. \end{array}$$

Setzt man alles dieses ein, so erhält man

$$(29) \qquad \frac{\cos\sigma \cos\theta}{\Delta\sigma\, \Delta\theta} = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{\Delta^2 a} - \sin^2 b}{1 - k^2 \dfrac{\cos^2 a}{\Delta^2 a} \sin^2 b} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\, \Delta^2 a}{\Delta^2 a - k^2 \sin^2 b \cos^2 a}.$$

Um nun die Producte $\cos\sigma \cos\theta$ und $\Delta\sigma\, \Delta\theta$ selbst zu finden, kann man sich des § 10 angeführten Satzes bedienen, dass die Functionen sin., cos. und Δ Nenner haben müssen, die bis auf einen constanten Factor einander gleich sind. Da nun $\sin\sigma$, $\sin\theta$ den Nenner $1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b$ hat, und man sich leicht überzeugen kann, dass Zähler und Nenner des vorigen Ausdrucks diese Grösse nicht schon als Factor enthalten, so kann man

wenn γ eine constante Grösse bezeichnet, setzen:

$$\cos\sigma\cos\vartheta = \frac{\cos^2 a - \sin^2 b\,\Delta^2 a}{\gamma(1-k^2\sin^2 a\sin^2 b)}; \quad \Delta\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{\Delta^2 a - k^2\sin^2 b\cos^2 a}{\gamma(1-k^2\sin^2 a\sin^2 b)}.$$

Um γ zu bestimmen, braucht man nur specielle Werthe für u und v einzusetzen und findet, wenn man $u = v = o$ setzt, dass $\gamma = 1$ ist, wodurch man die Formeln 11) und 12) erhält.

Man kann aber auch eine Formel für $\Delta\sigma\,\Delta\vartheta$ direct aus 10) ableiten, wenn man $iu + K$ statt u und iv statt v setzt und sich der Formeln [§ 10. (18), § 8. (12)]

$$\sin am\,(iz + K) = \frac{1}{\Delta\, am\,(z, k')}; \;\sin am\, iz = i\,\mathrm{tg}\, am\,(z, k')$$

bedient. Dann hat man, wenn man der Kürze wegen $am\,(u, k')$ mit (a, k') und in ähnlicher Weise die übrigen Amplituden mit dem complementären Modul bezeichnet, folgende Substitutionen zu machen:

u	geht über in	$iu + K$
v	- - -	iv
$u + v$	- - -	$i(u + v) + K$
$u - v$	- - -	$i(u - v) + K$
$\sin\sigma$	- - -	$\frac{1}{\Delta(\sigma, k')}$
$\sin\vartheta$	- - -	$\frac{1}{\Delta(\vartheta, k')}$
$\sin a$	- - -	$\frac{1}{\Delta(a, k')}$
$\sin^2 b$	- - -	$-\,\mathrm{tg}^2(b, k')$.

Da alsdann sämmtliche Amplituden das Complement des Moduls enthalten, so kann man wieder k statt k' setzen, muss dann aber statt des explicite vorkommenden k auch k' schreiben. Alsdann erhält man

$$\frac{1}{\Delta\sigma\,\Delta\vartheta} = \frac{\frac{1}{\Delta^2 a} + \mathrm{tg}^2 b}{1 + k'^2\frac{\mathrm{tg}^2 b}{\Delta^2 a}} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b\,\Delta^2 a}{\cos^2 b\,\Delta^2 a + k'^2\sin^2 b}$$

oder

$$\Delta\sigma\,\Delta\vartheta = \frac{\Delta^2 a - \Delta^2 a\sin^2 b + k'^2\sin^2 b}{1 - \sin^2 b + \sin^2 b\,(1 - k^2\sin^2 a)}$$

$$= \frac{\Delta^2 a - k^2\sin^2 b\cos^2 a}{1 - k^2\sin^2 a\sin^2 b}.$$

Hat man so $\Delta\sigma$ $\Delta\theta$ gefunden, so ergiebt sich aus (29) auch $\cos\sigma$ $\cos\theta$.

Dieselbe Methode kann man auch bei der Ableitung der Formeln 29) bis 34) anwenden.

Achter Abschnitt.

Ueber den Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie.

---

§ 30.

Stellen wir die Resultate des § 26 noch einmal kurz zusammen, so hat sich ergeben, dass von den Gleichungen

(1) $F(a) + F(b) = F(\sigma)$, $\cos\sigma = \cos a \cos b - \sin a \sin b\, \Delta\sigma$

jede die vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung

$$\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = o$$

mit der willkürlichen Constante σ ist, und ebenso von den Gleichungen

(2) $F(a) - F(b) = F(\theta)$, $\cos\theta = \cos a \cos b + \sin a \sin b\, \Delta\theta$

jede die vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung

$$\frac{da}{\Delta a} - \frac{db}{\Delta b} = o.$$

Nun bemerkte Lagrange*), dass die Formel (2) die grösste Aehnlichkeit mit der Grundformel der sphärischen Trigonometrie besitzt. Bezeichnen nämlich a, b, c die Seiten, und A, B, C die diesen resp. gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist

(3) . . $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$

Setzt man nun

$$c = \theta,$$

---

*) Théorie des fonctions. § 81. 82.

so kommt diese Formel mit (2) bis auf das an die Stelle von $\cos C$ getretene $\Delta\theta$ vollkommen überein. Allein im sphärischen Dreieck haben die Verhältnisse

$$\frac{\sin A}{\sin a}, \quad \frac{\sin B}{\sin b}, \quad \frac{\sin C}{\sin c},$$

alle drei denselben Werth. Bezeichnet man diesen Werth mit k, so ist

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k,$$

also

$$\sin A = k \sin a, \quad \sin B = k \sin b, \quad \sin C = k \sin c,$$

und dann

$$\cos A = \pm \Delta a, \quad \cos B = \pm \Delta b, \quad \cos C = \pm \Delta c,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem die betreffenden Winkel spitz oder stumpf sind. Nimmt man also den Winkel C spitz an und setzt $c = \theta$, so wird $\cos C = \Delta\theta$, und dadurch werden die Formeln (3) und (2) ganz identisch. Nimmt man dagegen C stumpf an und setzt $c = \sigma$, so wird $\cos C = -\Delta\sigma$, und dann geht die Formel (3) in (1) über. Da nun, wenn wie früher $a = am\, u$, $b = am\, v$ gesetzt wird,

$$\theta = am\,(u - v), \quad \sigma = am\,(u + v),$$

so folgt, dass wenn $am\, u$ und $am\, v$ als die Seiten eines sphärischen Dreiecks angesehen werden, die dritte Seite desselben Dreiecks gleich $am\,(u - v)$ oder $am\,(u + v)$ ist, je nachdem die beiden ersten Seiten einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschliessen. Der Modul der Amplitude ist alsdann das constante Verhältniss zwischen den Sinus der Winkel und den Sinus der gegenüberliegenden Seiten, nämlich

$$k = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Untersuchen wir nun, wie das sphärische Dreieck beschaffen sein muss, damit der Modul kleiner als 1 ausfalle. Da in diesem Falle

$$\sin B < \sin b$$

sein muss, so hat man das Dreieck so anzunehmen, dass wenn

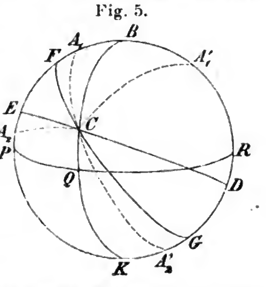
1) $B < 90^0$ ist, $b > B$

und wenn 2) $B > 90^0$ ist, $b < B$ und $> 180^0 - B$

sei.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass $B < 90^0$. Es sei PBQ (Fig. 5) der Winkel B, und C der auf dem Schenkel BQ liegende zweite Eckpunct des Dreiecks. Macht man $BP = BQ = 90^0$, so ist $PQ = B$, und dies zugleich das grösste unter allen Perpendikeln, die man von irgend einem Puncte des einen Schenkels des Winkels B auf den anderen fällen kann. Legt man nun durch den Punct C zwei grösste Kreise, den einen CE senkrecht auf BQ, den anderen CF senkrecht auf BP, so ist jedes dieser beiden Perpendikel kleiner als PQ und damit kleiner als B, also

Fig. 5.



$$CE < B, \quad CF < B.$$

Hieraus folgt: wenn die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b des sphärischen Dreiecks grösser als B sein soll, so darf der dritte Eckpunct A nicht zwischen E und F fallen, sondern muss eine der beiden durch A_1 und A_2 bezeichneten Lagen haben, nämlich entweder zwischen F und B oder zwischen E und K liegen. In beiden Fällen aber besitzt das sphärische Dreieck A_1BC oder A_2BC ausser dem spitzen Winkel B einen spitzen und einen stumpfen Winkel, nämlich entweder ist A_1 stumpf und C spitz, oder A_2 spitz und C stumpf.

Betrachten wir ferner den zweiten Fall, dass $B > 90^0$, und sei alsdann QBR dieser Winkel. In diesem Falle ist wieder $QR = B$, wenn $BQ = BR = 90^0$ gemacht wird; jetzt aber ist QR das kleinste unter allen Perpendikeln, die man von irgend einem Puncte des einen Schenkels des Winkels B auf den anderen fällen kann. Zieht man daher CD senkrecht auf BQ, und CG senkrecht auf BR, so ist

$$CG > B \quad \text{und} \quad CD > B.$$

Da nun jetzt $b < B$ sein muss*), so darf der dritte Eckpunct A des Dreiecks nicht zwischen D und G fallen, sondern muss eine der beiden durch A_1' und A_2' bezeichneten Lagen haben,

---

*) Die Forderung, dass b die Grenze $180^0 - B$ nicht überschreiten darf, ändert nichts an der Betrachtung.

nämlich entweder zwischen B und D oder zwischen G und K liegen. In dem ersten Falle sind die Winkel C und A'_1 beide spitz, das Dreieck $A_1'BC$ hat dann die Beschaffenheit der früheren Dreiecke A_1BC und A_2BC, es besitzt nämlich einen stumpfen und 2 spitze Winkel. Im zweiten Falle sind dagegen beide Winkel C und A_2' stumpf, sodass das Dreieck dann drei stumpfe Winkel hat.

Aus diesen Betrachtungen geht nun hervor, dass der Modul des sphärischen Dreiecks nur dann kleiner als 1 ist, wenn das Dreieck entweder einen oder drei stumpfe Winkel hat.

Es sei hiebei bemerkt, dass, wenn man das dem Dreieck ABC zugehörige Supplementardreieck mit $A'B'C'$ und dessen Seiten mit a', b', c' bezeichnet, sodass

$$a' = 180^0 - A, \qquad A' = 180^0 - a,$$

und folglich

$$\frac{\sin A'}{\sin a'} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

ist, der Modul des Supplementar-Dreiecks gerade dann kleiner als 1 ist, wenn der des ursprünglichen Dreiecks grösser als 1 ist, und umgekehrt.

Kehren wir nun zu unserer früheren Betrachtung zurück, und nehmen wir an, es seien $am\, u$, $am\, v$ und k, letzteres als ein echter Bruch, gegeben.

Setzt man

$$am\, u = a, \quad am\, v = b,$$

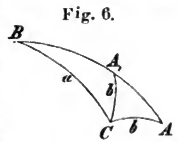
so kennt man zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes. Da ausserdem

$$\sin A = k \sin a, \quad \sin B = k \sin b$$

ist, so kennt man auch die Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel, kann aber die Winkel selbst noch beliebig als spitz oder als stumpf annehmen. Wir wollen annehmen, B sei ein spitzer Winkel, dann muss nach den eben erhaltenen Resultaten einer der beiden Winkel, entweder A oder C stumpf sein. Ist nun $am\, u < am\, v$, also $a < b$, so ist nur der letztere Fall möglich, ist aber $a > b$ gegeben, so kann man beide Fälle annehmen und erhält dadurch eine Bestätigung des bekannten Satzes, dass man aus zwei Seiten und einem Winkel, der der kleineren Seite gegenüber liegt, zwei sphärische Dreiecke construiren kann, die die gegebenen Stücke besitzen.

Bildet man diese beiden Dreiecke (Fig. 6), indem man auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels B, $BC = a = am\ u$ und dann $CA = CA_1 = b = am\ v$ macht, so folgt aus dem Früheren, weil nun der Winkel A_1CB spitz, der Winkel ACB aber stumpf ist, und beide sich zu 180^0 ergänzen, dass $A_1B = \vartheta = am\ (u - v)$ und $AB = \sigma = am\ (u + v)$ sein muss. Hierin ist nun ein einfaches Mittel enthalten, die Amplitude der Summe und Differenz geometrisch zu construiren.

Fig. 6.



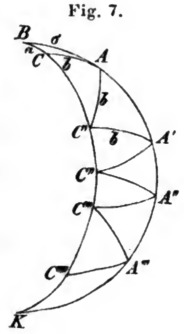
§ 31.

Man kann das Resultat des vorigen § auch in folgender Weise aussprechen und daraus noch einige Folgerungen ziehen. Besteht zwischen den Amplituden a, b und σ die Gleichung

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(a) + F(b) = F(\sigma),$$

so lassen sich a, b und σ als die Seiten eines sphärischen Dreiecks ansehen, bei welchem der zwischen a und b eingeschlossene Winkel stumpf ist. (Fig. 7.)

Fig. 7.



Nimmt man nun eine vierte Amplitude σ' so an, dass

$$(5) \quad . \quad . \quad F(b) + F(\sigma) = F(\sigma')$$

ist, so sind auch b, σ, σ' die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welches die Seiten b und σ mit dem vorigen gemeinsam hat und zwischen diesen Seiten einen stumpfen Winkel besitzt; man wird also dieses Dreieck erhalten, wenn man $AC' = b$ macht, und dann wird $BC' = \sigma'$ sein. Addirt man aber die beiden Gleichungen (5) und (4), so folgt

$$F(a) + 2\ F(b) = F(\sigma')$$

und da nun $F(a) = u$ und $F(b) = v$ ist, so folgt

$$BC' = \sigma' = am\ (u + 2v).$$

Setzt man ferner

$$F(b) + F(\sigma') = F(\sigma''),$$

so ist

$$\sigma'' = BA',$$

wenn man wieder $A'C' = b$ macht, und man erhält ebenso wie vorhin

$$BA' = \sigma'' = am\,(u + 3v).$$

Fährt man in dieser Weise fort, indem man

$$A'C'' = C''A'' = A''C''' \ldots . = b$$

macht, so erhält man, wenn

$$BC = am\, u, \quad AC = am\, v$$

gesetzt wird,

$$BA = am\,(u + v)$$
$$BC' = am\,(u + 2v)$$
$$BA' = am\,(u + 3v)$$
$$BC'' = am\,(u + 4v)$$
$$BA'' = am\,(u + 5v)$$
u. s. w.

Macht man nun endlich $u = v$, also auch $a = b$ und

$$BC = AC = am\, u,$$

so ist

$$BA = am\, 2u, \quad BC' = am\, 3u, \quad BA' = am\, 4u, \quad BC'' = am\, 5u,$$
$$BA'' = am\, 6u, \text{ u. s. w.}$$

§ 32.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ist ersichtlich, dass zwischen den elliptischen Functionen und der sphärischen Trigonometrie ein inniger Zusammenhang besteht. Man wird daher die Formeln der einen Disciplin aus denen der anderen herleiten können. Um dies an einigen Beispielen zu zeigen, wollen wir die Gaussischen Formeln der sphärischen Trigonometrie aus unseren Formeln für die elliptischen Functionen und zweitens das Additionstheorem der elliptischen Functionen aus der sphärischen Trigonometrie ableiten.

Zu den Gaussischen Formeln werden uns die Formeln 25) bis 28) des § 29 führen. Um das doppelte Zeichen bequem beibehalten zu können und dadurch zu gleicher Zeit zwei der Gaussischen Formeln zu erhalten, wollen wir mit ε eine Grösse bezeichnen, die nur einen der beiden Werthe $+ 1$ oder $- 1$ haben soll, sodass stets

$$\varepsilon^2 = + 1$$

ist. Dann lassen sich die Formeln 27) und 28) so schreiben:

$$(1 + \varepsilon\Delta\sigma)(1 + \varepsilon\Delta\theta) = \frac{(\Delta a + \varepsilon\Delta b)^2}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$(1 + \varepsilon\Delta\sigma)(1 - \varepsilon\Delta\theta) = \frac{k^2 \sin^2(a - \varepsilon b)}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}.$$

Daraus folgt durch Division

$$\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 - \varepsilon\Delta\theta} = \frac{(1 + \varepsilon\Delta\theta)^2}{k^2 \sin^2\theta} = \frac{(\Delta a + \varepsilon\Delta b)^2}{k^2 \sin^2(a - \varepsilon b)}.$$

Ebenso ergiebt sich aus 25) und 26) durch Division

$$\frac{1 + \varepsilon\cos\theta}{1 - \varepsilon\cos\theta} = \frac{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{(\cos a + \varepsilon\cos b)^2}{(\sin a\Delta b - \varepsilon\sin b\Delta a)^2},$$

mithin, wenn man die beiden letzten Formeln dividirt und die Wurzel auszieht

$$(6) \quad . \quad . \quad \frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{(\Delta a + \varepsilon\Delta b)(\sin a\Delta b - \varepsilon\sin b\Delta a)}{\sin(a - \varepsilon b)(\cos a + \varepsilon\cos b)}.$$

Ueber das der Wurzel zu ertheilende Zeichen ist zu bemerken, dass die eben aufgestellte Formel richtig ist, wenn sich ergeben wird, dass der rechte und linke Theil dieser Gleichung beide gleiches Zeichen haben. Sollte sich dagegen herausstellen, dass der eine Theil das entgegengesetzte Zeichen des andern hat, so müsste man einem von beiden noch ein Minuszeichen vorsetzen. Führt man nun die im rechten Theile angedeuteten Multiplicationen aus, indem man bemerkt, dass

$$\cos\varepsilon b = \cos b, \quad \sin\varepsilon b = \varepsilon\sin b,$$

also

$$\sin(a - \varepsilon b) = \sin a\cos b - \varepsilon\sin b\cos a$$

ist, so erhält man

$$\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{\Delta a\Delta b\sin a - \Delta a\Delta b\sin b + \varepsilon\sin a\Delta^2 b - \varepsilon\sin b\Delta^2 a}{\cos a\cos b\sin a - \cos a\cos b\sin b - \varepsilon\sin b\cos^2 a + \varepsilon\sin a\cos^2 b}.$$

Löst man nun $\Delta^2 a$, $\Delta^2 b$, $\cos^2 a$, $\cos^2 b$ auf, sodass

$$\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{\Delta a\Delta b(\sin a - \sin b) + \varepsilon\sin a(1 - k^2\sin^2 b) - \varepsilon\sin b(1 - k^2\sin^2 a)}{\cos a\cos b(\sin a - \sin b) - \varepsilon\sin b(1 - \sin^2 a) + \varepsilon\sin a(1 - \sin^2 b)}$$

wird, so sieht man, dass sich der Bruch durch $\sin a - \sin b$ heben lässt, wodurch man erhält

$$\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{\Delta a\Delta b + \varepsilon + \varepsilon k^2\sin a\sin b}{\cos a\cos b + \varepsilon + \varepsilon\sin a\sin b}$$

oder

$$\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{1 + \varepsilon\Delta a\Delta b + k^2\sin a\sin b}{1 + \varepsilon\cos a\cos b + \sin a\sin b}.$$

Diese Formel kann man nun leicht in eine der sphärischen Trigonometrie umwandeln; denn setzt man

$$\theta = c$$

$$\sin A = k \sin a, \ \sin B = k \sin b, \ \sin C = k \sin \theta,$$

so ist, weil $\theta = am\,(u - v)$ ist, C ein spitzer Winkel, folglich

$$\Delta\theta = \cos C.$$

Dann aber muss einer der beiden Winkel A und B spitz, und der andere stumpf sein, man muss daher

$$\cos A \cos B = - \Delta a \, \Delta b$$

setzen und erhält dann

$$\frac{1 + \varepsilon \cos C}{1 + \varepsilon \cos c} = \frac{1 - \varepsilon \cos A \cos B + \sin A \sin B}{1 + \varepsilon \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

$$= \frac{1 - \varepsilon\,(\cos A \cos B - \varepsilon \sin A \sin B)}{1 + \varepsilon\,(\cos a \cos b + \varepsilon \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{1 - \varepsilon \cos (A + \varepsilon B)}{1 + \varepsilon \cos (a - \varepsilon b)}.$$

Da diese Formel zeigt, dass beide Theile der Gleichung positiv sind, so ergiebt sich, dass wir früher bei der Wurzelausziehung das richtige Zeichen gewählt haben. Vorstehende Gleichung enthält nun wirklich zwei der Gaussischen Formeln, denn setzt man $\varepsilon = + 1$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)},$$

und für $\varepsilon = - 1$ in

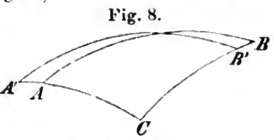
$$\frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)}.$$

Die beiden anderen Gaussischen Formeln wird man auf ähnliche Art erhalten, wenn man statt der Gleichung (6) die entsprechende für $\frac{1 + \varepsilon\Delta\theta}{1 - \varepsilon \cos \theta}$ herstellt, indem man den Ausdruck $\frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \cos \theta}$ in $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2}$ umformt.

Um zweitens das Additionstheorem der elliptischen Functionen aus der sphärischen Trigonometrie herzuleiten, betrachten wir in einem sphärischen Dreiecke eine Seite c und den ihr gegenüberliegenden Winkel C als constant, während die übrigen

Stücke sich verändern mögen. (Fig. 8.) Wir denken uns also etwa, dass sich die Seite AB zwischen den Schenkeln des unveränderlichen Winkels C so bewege, dass wenn sie in die Lage $A'B'$ übergegangen ist, $A'B' = AB$ sei

Fig. 8.



Alsdann ist auch der Modul des sphärischen Dreiecks

$$k = \frac{\sin C}{\sin c}$$

eine constante Grösse. Den Winkel C nehmen wir, um die Formel für die Addition zu erhalten, stumpf an, dann sind A und B entweder beide spitz oder beide stumpf, mithin $\cos A$ und $\cos B$ von gleichem Zeichen. Unter diesen Voraussetzungen nun differentiiren wir die Grundformel der sphärischen Trigonometrie

$$(7) \quad . \quad . \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

vollständig nach a und b und erhalten

$$o = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C)\, da$$
$$+ (-\cos a \sin b + \sin a \cos b \cos C)\, db.$$

Nun ist aber

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C = \sin c \cos B$$
$$\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \sin c \cos A,$$

folglich

$$o = -\sin c \cos B\, da - \sin c \cos A\, db,$$

und da entweder $\cos B = \Delta b$ und $\cos A = \Delta a$, oder $\cos B = -\Delta b$ und $\cos A = -\Delta a$ ist,

$$o = \Delta b\, da + \Delta a\, db$$

oder

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = o.$$

Wenn also zwischen den Variablen a und b die endliche Gleichung (7) besteht, so besteht zwischen ihnen auch die Differentialgleichung (8), jene ist also eine Integralgleichung dieser. Letztere enthält die Constante k, die endliche Gleichung (7) dagegen die Constanten c und C, da aber vermöge der Gleichung

$$\sin C = k \sin c$$

C eine Function von k und c ist, so enthält die Gleichung (7) eine Constante mehr, als die Differentialgleichung (8) und ist demnach die vollständige Integralgleichung von letzterer.

Neunter Abschnitt.

Das Additionstheorem für die zweite und dritte Gattung.

---

§ 33.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Summe zweier elliptischen Integrale der zweiten Gattung zu finden, wenn zwischen ihren Amplituden die in den vorigen §§ behandelte Relation stattfindet.

Es seien also φ, ψ und σ drei solche Amplituden, dass zwischen ihnen folgende Gleichungen bestehen

$$(1) \quad . \quad . \quad \begin{cases} F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma) \\ \cos\sigma = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\Delta\sigma \\ \dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \dfrac{d\psi}{\Delta\psi} = o, \end{cases}$$

von welchen die beiden ersten vollständige Integralgleichungen der letzteren mit der willkürlichen Constante σ sind; es entsteht dann die Aufgabe, die Summe U der Integrale

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad E_1(\varphi) + E_1(\psi) = U$$

zu finden. Hier ist U ein Integral von einer Function von φ und ψ, da aber vermöge der vorhergehenden Gleichungen (1) ψ eine Function von φ und der willkürlichen Constante σ ist, so ist U ein Integral von einer einzigen Variablen, eine Quadratur; U ist daher ein integrabler Ausdruck und es fragt sich nur, ob das Integral auf einen algebraischen Ausdruck, einen Logarithmus oder Kreisbogen führt, oder ob es höherer Natur ist. Es wird sich zeigen, dass das erstere der Fall ist.

Der Weg, ψ als Function von φ in U wirklich einzuführen, würde ein sehr weitläufiger sein; wir kommen kürzer zum Ziele, wenn wir U als Function der beiden Variablen φ und ψ behandeln und dU als ein vollständiges Differential herzustellen suchen, was nach den eben angestellten Betrachtungen gelingen muss.

Da nach der im § 18 aufgestellten Definition der Function E_1

$$E_1(\varphi) = \int_0^{\varphi} \varDelta\varphi \, d\varphi$$

ist, so erhält man durch vollständige Differentiation der Gleichung (2) nach φ und ψ

$$dU = \varDelta\varphi \, d\varphi + \varDelta\psi \, d\psi;$$

addirt man dazu die aus der letzten der Gleichungen (1) folgende Gleichung

$$o = \varDelta\psi \, d\varphi + \varDelta\varphi \, d\psi,$$

so erhält man den sogleich integrablen Ausdruck

$$dU = (\varDelta\varphi + \varDelta\psi)(d\varphi + d\psi).$$

Setzt man nämlich, wie im § 26 (S. 107),

$$\varphi + \psi = p$$

und benutzt die daselbst unter (17) abgeleitete Formel

$$\varDelta\varphi + \varDelta\psi = \beta \sin p,$$

wo β, durch σ ausgedrückt, den Werth

$$\beta = \frac{1 + \varDelta\sigma}{\sin\sigma}$$

hat, so erhält man

$$dU = \beta \sin p \, dp,$$

und dann durch Integration sofort

$$U = -\beta \cos p + C = -\frac{1 + \varDelta\sigma}{\sin\sigma} \cos(\varphi + \psi) + C,$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet. Es handelt sich jetzt nur noch darum, die letztere zu bestimmen, d. h. durch σ auszudrücken, und die Gleichung auf ihre einfachste Gestalt zu bringen.

Setzen wir zu diesem Zwecke in die nun gewonnene Gleichung

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) = -\frac{1 + \varDelta\sigma}{\sin\sigma} \cos(\varphi + \psi) + C$$

die beiden zusammengehörigen Werthe $\varphi = o$ und $\psi = \sigma$ ein, so erhalten wir, da $E_1(o) = o$ ist,

$$C = E_1(\sigma) + \frac{1 + \varDelta\sigma}{\sin\sigma} \cos\sigma,$$

und dadurch

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma) = \frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}(\cos\sigma - \cos(\varphi+\psi))$$
$$= \frac{1+\Delta\sigma}{\sin\sigma}(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi).$$

Wegen der Gleichungen (1) ist aber

$$\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma,$$

folglich erhält man

$$(3)\qquad E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma) = \frac{1-\Delta^2\sigma}{\sin\sigma}\sin\varphi\sin\psi$$
$$= k^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$$

In dieser Gleichung besteht das Additionstheorem für die zweite Gattung; man könnte darin noch $\sin\sigma$ nach (22) § 27 durch φ und ψ ausdrücken, wodurch der Ausdruck rechts von φ und ψ allein abhängig wird. Es ist zu bemerken, dass diese Gleichung wieder nur in Verbindung mit den Gleichungen (1) einen Sinn hat, indem sie nur dann gilt, wenn die Amplituden φ, ψ, σ jenen Gleichungen genügen. Sie wird aber zu einer selbständig dastehenden Gleichung, wenn man die elliptischen Functionen einführt. Denn setzt man wie früher

$$\varphi = am\,u, \quad \psi = am\,v, \quad \text{so ist } \sigma = am\,(u+v),$$
$$E_1(\varphi) = E(u); \quad E_1(\psi) = E(v), \quad E_1(\sigma) = E(u+v),$$

also

$$E(u+v) = E(u) + E(v) - k^2 \sin am\,u \sin am\,v \sin am\,(u+v).$$

Damit ist die Function E von der Summe $(u+v)$ durch die Functionen der einzelnen Argumente und durch einfache elliptische Functionen ausgedrückt. Einen speciellen Fall dieses Satzes, nämlich den Werth von $E(K-u)$ haben wir schon § 22 durch directe Behandlung des Integrals abgeleitet. Derselbe Ausdruck

$$E(K-u) = E - E(u) + k^2 \sin am\,u \sin am\,(K-u)$$
$$= E - Eu + k^2 \sin am\,u \frac{\cos am\,u}{\Delta\,am\,u}$$

folgt nun auch durch Einsetzung der speciellen Werthe.

§ 34.

In ähnlicher Weise, wie eben unter Zugrundelegung der Gleichungen (1) die Summe zweier Integrale zweiter Gattung gefunden worden ist, kann man auch die Summe zweier Integrale drit-

ter Gattung finden. Setzt man nämlich unter Anwendung der Legendre'schen Form (vgl. § 19)

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) = U,$$

so ist, weil ψ eine Function von φ ist, U ein Integral von φ allein, also muss sich dU, durch φ und ψ ausgedrückt, in einen integrablen Ausdruck umformen lassen. Man hat (§ 19)*)

$$dU = \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\,\Delta\psi};$$

aber wegen (1) ist

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

folglich

$$(5) \quad \ldots \quad dU = \frac{n(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{1 + n(\sin^2\varphi + \sin^2\psi) + n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun folgt aus der Gleichung (3) durch Differentiation, weil σ als constant zu betrachten ist,

$$\Delta\varphi\, d\varphi + \Delta\psi\, d\psi = k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi),$$

oder mit nochmaliger Benutzung der Gleichung (4)

$$k^2\sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi) = \frac{\Delta^2\varphi - \Delta^2\psi}{\Delta\varphi}\, d\varphi$$
$$= k^2(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Dies nun in (5) substituirt giebt

$$dU = \frac{n\sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)}{1 + n(\sin^2\varphi + \sin^2\psi) + n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

oder wenn man

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p, \quad \sin\varphi\sin\psi = q$$

setzt,

$$dU = \frac{n\sin\sigma\, dq}{1 + np + n^2q^2},$$

und es bleibt jetzt nur noch übrig, p durch q auszudrücken. Dies geschieht vermittelst der zweiten der Gleichungen (1); denn aus derselben folgt

$$(\cos\sigma + q\Delta\sigma)^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi = (1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi)$$
$$= 1 - p + q^2,$$

folglich erhält man

*) Legendre. Exercices du calcul intégral. I. pag. 75 und Traité des Fonctions elliptiques. I. pag. 74.

$$p = 1 + q^2 - (\cos\sigma + q\Delta\sigma)^2$$
$$= \sin^2\sigma - 2\cos\sigma\Delta\sigma\, q + k^2 \sin^2\sigma\, q^2,$$

und dann

$$dU = \frac{n \sin\sigma dq}{1 + n\sin^2\sigma - 2n\cos\sigma\Delta\sigma q + n(n + k^2\sin^2\sigma)q^2},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(6)\quad \begin{cases} n\sin\sigma = M, & n\cos\sigma\Delta\sigma = B \\ 1 + n\sin^2\sigma = A, & n(n + k^2\sin^2\sigma) = n(n + 1 - \Delta^2\sigma) = C \end{cases}$$

setzt,

$$dU = \frac{Mdq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Hiedurch ist nun dU als ein Differential von einer einzigen Variablen q dargestellt, und man erhält alsdann

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) = \int dU + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten hat man die Bedingung zu benutzen, dass für $\varphi = o$, $\psi = \sigma$, also $q = o$ werde; dann ist

$$\Pi_1(\sigma, n) = \int_0 dU + \text{Const.}$$

folglich

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) - \Pi_1(\sigma, n) = \int_0^q dU.$$

Nun schreibt sich

$$dU = \frac{CMdq}{AC - B^2 + (Cq - B)^2} = \frac{CM}{AC - B^2} \cdot \frac{dq}{1 + \left(\frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}}\right)^2},$$

demnach erhält man durch unbestimmte Integration

$$\frac{M}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}}$$

und dann, wenn man der Kürze wegen $\int_0^q dU = U_1$ setzt,

$$U_1 = \frac{M}{\sqrt{AC - B^2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{Cq - B}{\sqrt{AC - B^2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}\right],$$

und wenn man endlich die beiden Arcus Tangens nach der Formel

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

vereinigt,

$$U_1 = \frac{M}{\sqrt{AC-B^2}} \text{ arc tg } \frac{q\sqrt{AC-B^2}}{A-Bq}.$$

Substituirt man nun hierin die Werthe von M, A, B, C aus (6), so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= n(1+n-\Delta^2\sigma)(1+n\sin^2\sigma) - n^2\cos^2\sigma\Delta^2\sigma \\ &= n[1+n-\Delta^2\sigma+n(1+n)\sin^2\sigma - n\Delta^2\sigma] \\ &= n(1+n)(1-\Delta^2\sigma+n\sin^2\sigma) \\ &= n(1+n)(k^2+n)\sin^2\sigma, \end{aligned}$$

also wenn man der Kürze wegen

$$\frac{(1+n)(k^2+n)}{n} = \omega$$

setzt,

$$\sqrt{AC-B^2} = n\sqrt{\omega}\sin\sigma,$$

und daher

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) - \Pi_1(\sigma, n) = U_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \text{ arc tg } \frac{n\sqrt{\omega}\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma}{1+n\sin^2\sigma - n\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\Delta\sigma}.$$

Für den Fall, dass der Parameter n negativ und numerisch kleiner als k^2 ist, auf welchen Fall, wie § 20 erwähnt ist, sich die Jacobi'sche Normalform der dritten Gattung bezieht, wird der vorige Ausdruck imaginär und verwandelt sich in einen Logarithmus. Setzt man für diesen Fall

$$n = -k^2\sin^2\alpha,$$

so wird

$$\sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{(1+n)(k^2+n)}{n}} = i\,\frac{\cos\alpha\,\Delta\alpha}{\sin\alpha};$$

demnach erhält man

$$U_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{i\Delta\alpha} \text{ arc tg } \frac{-ik^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma}{1-k^2\sin^2\sigma\sin^2\alpha+k^2\sin^2\alpha\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\Delta\sigma},$$

und wenn man die Formel

$$\frac{1}{i} \text{ arc tg } iz = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

anwendet,

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\Delta\alpha}\log H$$

und

$$H = \frac{1-k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha - k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi\,(\sin\sigma\cos\alpha\,\varDelta\alpha - \sin\alpha\cos\sigma\,\varDelta\sigma)}{1-k^2 \sin^2\sigma \sin^2\alpha + k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi\,(\sin\sigma\cos\alpha\,\varDelta\alpha + \sin\alpha\cos\sigma\,\varDelta\sigma)}$$

$$= \frac{1-k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi \dfrac{\sin\sigma\cos\alpha\,\varDelta\alpha - \sin\alpha\cos\sigma\,\varDelta\sigma}{1-k^2\sin^2\sigma\sin^2\alpha}}{1+k^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi \dfrac{\sin\sigma\cos\alpha\,\varDelta\alpha + \sin\alpha\cos\sigma\,\varDelta\sigma}{1-k^2\sin^2\sigma\sin^2\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck kann nun auch unmittelbar in elliptischen Functionen ausgedrückt werden. Nach S. 72 hat man nämlich, wenn

$$\varphi = am\, u, \quad n = -k^2 \sin^2\alpha = -k^2 \sin^2 am\, a$$

gesetzt wird,

$$\Pi_1(\varphi, n) = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\varDelta\, am\, a}\, \Pi(u, a).$$

Nun ist aber, wenn ausserdem $\psi = \sin am\, v$ gesetzt wird, $\sigma = am\,(u + v)$, man erhält also sofort

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u + v, a) = \tfrac{1}{2} \log H.$$

In dem Ausdrucke für H aber wird den Formeln (25) S. 112 gemäss

$$\frac{\sin\sigma\cos\alpha\,\varDelta\alpha \mp \sin\alpha\cos\sigma\,\varDelta\sigma}{1-k^2\sin^2\sigma\sin^2\alpha} = \sin am\,(u + v \mp a),$$

und daher

$$H = \frac{1-k^2 \sin am\, a \sin am\, u \sin am\, v \sin am\,(u+v-a)}{1+k^2 \sin am\, a \sin am\, u \sin am\, v \sin am\,(u+v+a)}.$$

Ueberblicken wir die in diesem und den vorigen §§ gewonnenen Resultate noch einmal, so hat sich ergeben, dass in Folge der Relation

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta\sigma$$

der Ausdruck

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\sigma)$$

gleich Null wird. In Folge derselben Relation wird dann der entsprechende Ausdruck für die Integrale der zweiten Gattung

$$E_1(\varphi) + E_1(\psi) - E_1(\sigma)$$

einem algebraischen Ausdrucke, und der für die Integrale der dritten Gattung

$$\Pi_1(\varphi, n) + \Pi_1(\psi, n) - \Pi_1(\sigma, n)$$

einem Logarithmus oder Arcus Tangens gleich.

Zehnter Abschnitt.

Integration der elliptischen Differentialgleichung in algebraischer Form.

§ 35.

Wir haben bisher das Additionstheorem und alle daraus fliessenden Formeln in trigonometrischer Form gegeben, indem wir von der Normalform der elliptischen Integrale ausgingen. Wir wollen nun die Integration der elliptischen Differentialgleichung auch in algebraischer Form vornehmen.

Lagrange's Methode.*)

Bezeichnet man mit φx eine ganze Function des vierten Grades, nämlich setzt man

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

so kann man die elliptische Differentialgleichung schreiben

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi y}} = o.$$

Integrirt man dieselbe zuerst gliedweise und führt als willkürliche Constante c denjenigen Werth von y ein, welcher dem Werthe $x = o$ entspricht, so erhält man

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\varphi y}} = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{\varphi c}}.$$

Um nun die Differentialgleichung anders zu integriren und dadurch die algebraische Relation zwischen x, y, c zu finden, sieht Lagrange x und y als Functionen einer neuen Variablen t an, indem er setzt

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\varphi x},$$

woraus sich

$$\frac{dy}{dt} = - \sqrt{\varphi y}$$

*) Lagrange. Théorie des fonctions § 79. Richelot. Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. Crelle's Journ. Bd. 23.

ergiebt. Durch Quadrirung und nochmalige Differentiation nach t folgt daraus

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\varphi' x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\varphi' y,$$

indem mit $\varphi' x$ der Differentialquotient der Function φ nach x bezeichnet wird. Lagrange setzt ferner

$$x + y = p, \qquad x - y = q,$$

dann ist

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \tfrac{1}{2}(\varphi' x + \varphi' y),$$

und

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}, \quad \frac{dq}{dt} = \sqrt{\varphi x} + \sqrt{\varphi y},$$

folglich auch

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = \varphi x - \varphi y.$$

Nun bildet Lagrange, um ein vollständiges Differential herzustellen, den Ausdruck

$$q \frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt},$$

welcher, durch x und y ausgedrückt,

$$q \frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = \tfrac{1}{2}(x - y)(\varphi' x + \varphi' y) - (\varphi x - \varphi y) = X$$

ergiebt, und den wir der Kürze wegen mit X bezeichnen wollen. Diesen Ausdruck entwickelt nun Lagrange durch Rechnung, indem er x und y durch p und q ersetzt und zeigt, dass er sich durch q^3, d. h. durch $(x - y)^3$ ohne Rest theilen lässt. Man kann dies aber auch ohne Rechnung einsehen. X ist nämlich eine alternirende Function von x und y, d. h. eine Function, welche den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man x und y mit einander vertauscht. Eine alternirende Function aber, wenn sie zugleich eine ganze Function ist, lässt sich immer durch $x - y$ ohne Rest theilen. Dass dies mit dem Ausdruck X der Fall ist, sieht man ausserdem auch ein, wenn man bedenkt, dass $\varphi x - \varphi y$ aus einem Aggregat von Differenzen gleichnamiger Potenzen von x und y besteht, und solche Differenzen stets durch $x - y$ theilbar sind. Hienach ist also X einmal durch $x - y$ theilbar. Differentiirt man nun X zweimal hintereinander partiell nach x, so erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x-y)\,\varphi''x + \tfrac{1}{2}(\varphi'x + \varphi'y) - \varphi'x$$
$$= \tfrac{1}{2}(x-y)\,\varphi''x - \tfrac{1}{2}(\varphi'x - \varphi'y)$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \tfrac{1}{2}(x-y)\,\varphi'''x + \tfrac{1}{2}\varphi''x - \tfrac{1}{2}\varphi''x$$
$$= \tfrac{1}{2}(x-y)\,\varphi'''x,$$

und diese Ausdrücke zeigen, dass auch $\frac{\partial X}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ durch $x-y$ theilbar sind. Daraus folgt aber, dass X selbst durch $(x-y)^3$ theilbar sein muss. Da nun X eine ganze Function vom vierten Grade ist, so muss es die Form

$$X = (x-y)^3(\alpha + \beta x + \gamma y)$$

haben, wo α, β, γ zu bestimmende Constanten sind. Aber X ist eine alternirende Function, also muss $\alpha + \beta x + \gamma y$ eine symmetrische Function von x und y sein, demnach hat man zunächst $\beta = \gamma$, und

$$X = (x-y)^3(\alpha + \beta(x+y));$$

dann ist aber ersichtlich, dass β der Coefficient von x^4, und α der Coefficient von x^3 in dem Ausdrucke für X ist. Da nun

$$\varphi'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3$$

ist, so ergiebt sich leicht der Coefficient von x^4

$$\beta = 2E - E = E,$$

und der Coefficient von x^3

$$\alpha = \tfrac{3}{2}D - D = \tfrac{1}{2}D,$$

und man erhält

$$X = (x-y)^3\left(E(x+y) + \tfrac{1}{2}D\right)$$

und folglich

$$\frac{q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}}{q^3} = (Ep + \tfrac{1}{2}D).$$

Dieser Ausdruck wird nun sofort integrabel, wenn man ihn im Zähler und Nenner mit q, und ausserdem die ganze Gleichung mit $2\frac{dp}{dt}$ multiplicirt. Denn dadurch kommt

$$\frac{2q^2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d^2p}{dt^2} - 2q\frac{dq}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{q^4} = 2Ep\frac{dp}{dt} + D\frac{dp}{dt},$$

und da man jetzt zur Linken das vollständige Differential von

$\dfrac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{q^2}$ stehen hat, so folgt, wenn mit m die Integrationsconstante bezeichnet wird,

$$(1) \quad \ldots \quad \left(\frac{\frac{dp}{dt}}{q}\right)^2 = Ep^2 + Dp + m.$$

Hiemit ist die Integration vollbracht, und da man für alle in dieser Gleichung vorkommenden Grössen endliche Ausdrücke durch x und y hat, so erhält man, wenn man diese substituirt, die vollständige Integralgleichung in folgender Form:

$$(2) \quad \ldots \quad \left(\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y}\right)^2 = E(x+y)^2 + D(x+y) + m.$$

Um die willkürliche Constante m durch c auszudrücken, setze man darin $x = o$ und $y = c$, dann geht $\sqrt{\varphi x}$ in $\sqrt{A}$ über und man erhält

$$m = \left(\frac{\sqrt{A} - \sqrt{\varphi c}}{c}\right)^2 - Ec^2 - Dc$$

und dadurch

$$(3) \quad \left(\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y}\right)^2 - E(x+y)^2 - D(x+y)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{A} - \sqrt{\varphi c}}{c}\right)^2 - Ec^2 - Dc.$$

Um nun zuerst zu zeigen, dass unsere früheren trigonometrischen Formen mit dieser algebraischen Gleichung aufs genaueste zusammenhängen, wollen wir statt des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung $\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}$ die algebraische Normalform

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

desselben betrachten, auf welche sich jenes, wie wir ausführlich gezeigt haben, immer zurückführen lässt. Wir wollen also setzen

$$\varphi x = (1-x^2)(1-k^2x^2) = 1 - (1+k^2)x^2 + k^2x^4,$$

wodurch

$$A = 1, \; D = o, \; E = k^2$$

wird. Setzt man alsdann

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\varphi y}} = v,$$

so ist $\int_0^c \frac{dc}{\sqrt{\varphi c}} = u + v$, und unter der Annahme der speciellen Form von φx

$$x = \sin am\, u = \sin a;\ y = \sin am\, v = \sin b$$
$$c = \sin am\,(u + v) = \sin \sigma.$$

Ferner

$$1 - x^2 = \cos^2 a,\quad 1 - k^2 x^2 = \Delta^2 a,$$

also

$$\varphi x = \cos^2 a\, \Delta^2 a,\ \varphi y = \cos^2 b\, \Delta^2 b,\ \varphi c = \cos^2 \sigma\, \Delta^2 \sigma.$$

Setzt man alles dieses ein, so nimmt die Gleichung (3) eine trigonometrische Form an und geht in folgende über:

$$\left(\frac{\cos a\, \Delta a - \cos b\, \Delta b}{\sin a - \sin b}\right)^2 - k^2 (\sin a + \sin b)^2$$
$$= \left(\frac{1 - \cos\sigma\, \Delta\sigma}{\sin\sigma}\right)^2 - k^2 \sin^2 \sigma,$$

welche sich auch aus den früheren Formeln herstellen lässt.

Ausser der Gleichung (2) kann man noch ein Paar andere, der letzteren äquivalente, Integralgleichungen finden. Aus (1) ergiebt sich nämlich

$$\frac{dp}{dt} = q\sqrt{Ep^2 + Dp + m},$$

und da

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = \varphi x - \varphi y$$

war,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varphi x - \varphi y}{q\sqrt{Ep^2 + Dp + m}}.$$

Nun war aber auch

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\varphi x} + \sqrt{\varphi y},$$

also erhält man

$$\sqrt{\varphi x} + \sqrt{\varphi y} = \frac{\varphi x - \varphi y}{q\sqrt{Ep^2 + Dp + m}}.$$

Aus (2) zieht man

$$\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y} = q\cdot\sqrt{Ep^2 + Dp + m},$$

mithin ist auch

$$2\sqrt{\varphi x} = \frac{\varphi x - \varphi y + q^2(Ep^2 + Dp + m)}{q\sqrt{Ep^2 + Dp + m}}$$
$$2\sqrt{\varphi y} = \frac{\varphi x - \varphi y - q^2(Ep^2 + Dp + m)}{q\sqrt{Ep^2 + Dp + m}},$$

zwei Gleichungen, die durch Quadrirung sogleich rational in x und y werden.

Euler's Methode.

§ 36.

Euler*) schlug den entgegengesetzten Weg ein, indem er von einer endlichen Gleichung ausging und aus derselben durch Differentiation unsere Differentialgleichung ableitete, der Art, dass sie eine Constante weniger enthielt, als die endliche Gleichung, sodass diese die vollständige Integralgleichung von jener war.

Euler ging von einer allgemeinen Gleichung zwischen x und y aus, die für keine der beiden Variabeln den zweiten Grad übersteigt. Eine solche lässt sich in zwei Formen schreiben; sowohl

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + y(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) \\ \qquad + y^2(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) = o, \\ \text{als auch} \\ (\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2) + x(\beta + \beta_1 y + \beta_2 y^2) \\ \qquad + x^2(\gamma + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2) = o, \end{cases}$$

oder wenn man

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha + \beta x + \gamma x^2 = X & \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 = Y \\ \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 = X_1 & \beta + \beta_1 y + \beta_2 y^2 = Y_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2 = X_2 & \gamma + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 = Y_2 \end{cases}$$

setzt, auch

$$(6)\quad X + yX_1 + y^2X_2 = o, \text{ oder } Y + xY_1 + x^2Y_2 = o.$$

Differentiirt man diese Gleichung vollständig nach x und y, so erhält man

$$(Y_1 + 2xY_2)\,dx + (X_1 + 2yX_2)\,dy = o,$$

oder

$$\frac{dx}{X_1 + 2yX_2} + \frac{dy}{Y_1 + 2xY_2} = o.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (6) aber erhält man

$$(7)\quad (X_1 + 2yX_2)^2 = X_1^2 - 4XX_2;\ (Y_1 + 2xY_2)^2 = Y_1^2 - 4YY_2,$$

---

*) Euler. Institutiones calculi integralis. I. Sect. 2. Cap. 6. Moigno Leç. de calcul diff. et int. II, 192.

folglich

$$(8) \quad \ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - 4XX_2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - 4YY_2}} = o.$$

Dadurch hat die Differentialgleichung schon in so weit die gewünschte Form, als die Differentiale dx und dy dividirt sind durch die Wurzeln aus ganzen Functionen des vierten Grades von x und y. Allein bei der elliptischen Differentialgleichung sind diese Functionen in beiden Gliedern dieselben. Um der gefundenen Differentialgleichung diese Form zu geben, darf man nur die Coefficienten α, β, γ, α_1 u. s. w. so wählen, dass die X dieselben Functionen von x werden, wie die Y Functionen von y sind. Nun unterscheiden sich die X von den Y aber nur dadurch, dass die zur Diagonale symmetrisch liegenden Coefficienten mit einander vertauscht sind. Setzt man daher je zwei solcher Coefficienten einander gleich, so erreicht man das Verlangte. Man setze daher

$$\alpha = a, \ \beta = \alpha_1 = b, \ \gamma = \alpha_2 = c, \ \beta_1 = d, \ \gamma_1 = \beta_2 = e, \ \gamma_2 = f,$$

dann wird

$$\begin{array}{ll} X = a + bx + cx^2 & Y = a + by + cy^2 \\ X_1 = b + dx + ex^2 & Y_1 = b + dy + ey^2 \\ X_2 = c + ex + fx^2 & Y_2 = c + ey + fy^2 \end{array}$$

und die Differentialgleichung (8) geht in die elliptische Differentialgleichung über. Die ursprüngliche Gleichung (4) wird aber dann symmetrisch und erhält die Form

$$(9) \quad a + b(x+y) + c(x^2+y^2) + dxy + exy(x+y) + fx^2y^2 = o.$$

Diese Gleichung ist nun die Integralgleichung der Differentialgleichung (8), und sie ist auch vollständig, denn sie enthält 6 Constanten, während jene nur 5 enthält. Setzt man nämlich jetzt

$$X_1^2 - 4XX_2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = \varphi x,$$

so wird

$$(10) \quad \begin{cases} A = b^2 - 4ac; \ B = 2bd - 4(ae + bc); \\ \qquad C = d^2 + 2be - 4(c^2 + be + af) \\ D = 2de - 4(ce + bf); \quad E = e^2 - 4cf. \end{cases}$$

Sieht man nun die Differentialgleichung (8), also auch die Grössen A, B, C, u. s. w. als gegeben an, so ist es nicht möglich, aus den vorstehenden 5 Gleichungen alle 6 Grössen a, b, c, u. s. w.

zu bestimmen, sondern eine derselben bleibt nothwendig willkürlich. Die Gleichung (9) ist daher die vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung (8), und zwischen den Constanten a, b, c, u. s. w. und A, B, C, u. s. w. bestehen die 5 Bedingungsgleichungen (10).

Man kann nun auch von hier aus wieder auf die Gleichung (2) des vorigen § gelangen. Wir wollen dabei nur das obere Zeichen der Gleichung (8) berücksichtigen, indem das untere Zeichen zu ganz ähnlichen Resultaten führt.

Unter dieser Voraussetzung erhält man aus (7)

$$\sqrt{\varphi x} = X_1 + 2yX_2 \qquad \sqrt{\varphi y} = Y_1 + 2xY_2,$$

und daraus

$$\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y} = X_1 - Y_1 + 2yX_2 - 2xY_2,$$

und wenn man diesen Ausdruck entwickelt,

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y} &= d(x-y) + e(x^2-y^2) + 2y(c+ex+fx^2) \\ &\qquad - 2x(c+ey+fy^2) \\ &= (d-2c)(x-y) + e(x^2-y^2) + 2fxy(x-y),\end{aligned}$$

mithin

$$\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y} = d - 2c + e(x+y) + 2fxy.$$

Erhebt man nun diese Gleichung ins Quadrat, so kommt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y}\right)^2 &= (d-2c)^2 + e^2(x+y)^2 + 4f^2x^2y^2 \\ &\quad + 2e(d-2c)(x+y) + 4f(d-2c)xy + 4efxy(x+y).\end{aligned}$$

Wegen (9) ist aber

$$4f^2x^2y^2 + 4efxy(x+y) + 4dfxy = -4cf(x^2+y^2) - 4bf(x+y) - 4af.$$

Substituirt man dies, so erhält man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y}\right)^2 &= (e^2 - 4cf)(x+y)^2 + [2e(d-2c) - 4bf](x+y) \\ &\quad + (d-2c)^2 - 4af,\end{aligned}$$

und wenn man die Ausdrücke (10) berücksichtigt,

$$\left(\frac{\sqrt{\varphi x} - \sqrt{\varphi y}}{x-y}\right)^2 = E(x+y)^2 + D(x+y) + [(d-2c)^2 - 4af].$$

Dies ist aber die Gleichung (2) des vorigen §, und der Ausdruck $(d-2c)^2 - 4af$ die willkürliche Constante dieser Gleichung.

Elfter Abschnitt.

Jacobi's geometrische Construction des Additionstheoremes.*)

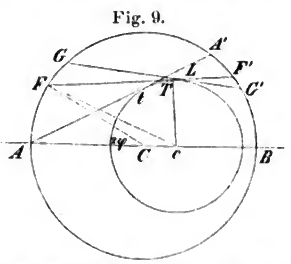
---

§ 37.

Wir gehen nun zu einigen geometrischen Betrachtungen über, die von Jacobi herrühren, zunächst noch mit dem Additionstheoreme zusammenhängen und eine Construction desselben liefern in ähnlicher Weise, wie die Construction Lagrange's mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie (§ 30); die uns dann aber auch zur Berechnung der elliptischen Integrale führen werden.

Es seien (Fig. 9) C und c die Mittelpuncte zweier Kreise, von denen der letztere ganz innerhalb des ersteren liegt, und R und r ihre Radien, ferner $\delta = Cc$ der Abstand der beiden Mittelpuncte von einander. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpuncte sei AB. Auf der Peripherie des äusseren Kreises nehmen wir einen veränderlichen Punct F an, dessen Lage

Fig. 9.



durch den Winkel, den der veränderliche Radius CF mit dem festen Radius AC bildet, gegeben sei. Diesen Winkel bezeichnen wir mit 2φ, also

$$ACF = 2\varphi.$$

Aus F lege man eine Tangente an den inneren Kreis, nenne den Berührungspunct T und drücke die Länge der Geraden FT durch φ, R, r, δ aus. Zieht man die Geraden Fc und Tc, so ist

$$\overline{FT}^2 = \overline{Fc}^2 - r^2 \quad \text{und} \quad \overline{Fc}^2 = R^2 + \delta^2 + 2R\delta \cos 2\varphi,$$

also wenn man noch $\cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$ setzt,

---

*) Jacobi. Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie. Crelle's Journ. Bd. 3.

$$\overline{FT}^2 = (R+\delta)^2 - r^2 - 4\delta R \sin^2\varphi.$$

$$\overline{FT} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\sqrt{\left(1 - \frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2}\sin^2\varphi\right)}.$$

Setzt man nun

$$\frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2} = k^2,$$

so wird

$$\overline{FT} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$$
$$= \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2}\,\Delta\varphi.$$

Drückt man den vor $\Delta\varphi$ stehenden Factor durch k aus, so kann man auch schreiben

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \overline{FT} = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k}\,\Delta\varphi.$$

Um die geometrische Bedeutung dieses Factors einzusehen, darf man nur den Punct F so wählen, dass das zugehörige $\Delta\varphi$ den Werth 1 erhält. Man hat also $\varphi = o$ zu setzen, d. h. den Punct F mit dem Puncte A zusammenfallen zu lassen. Zieht man dann aus A eine Tangente an den kleinen Kreis und nennt t den Berührungspunct, so ist, wie auch aus der Figur unmittelbar erhellt,

$$\sqrt{(R+\delta)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k} = \overline{At},$$

also auch

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \overline{FT} = \overline{At}\,\Delta\varphi.$$

Diese Gleichung gilt, wo auch der Punct F auf der Peripherie des äusseren Kreises liegen mag. Bezeichnet nun F' den Punct, in welchem die Tangente FT den äusseren Kreis zum zweiten Male schneidet, und nennt man $2\varphi'$ den Winkel zwischen dem Radius CF' und dem festen Radius CA, setzt also

$$ACF' = 2\varphi',$$

so ist auch

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \overline{F'T} = \overline{At}\,\Delta\varphi'.$$

Untersuchen wir nun zuerst, wann der Modul k^2 kleiner als 1 ist. Damit dies eintritt, muss man haben

$$4\delta R < (R+\delta)^2 - r^2, \quad r^2 < (R-\delta)^2.$$

Liegt nun der Mittelpunct c des kleineren Kreises innerhalb des

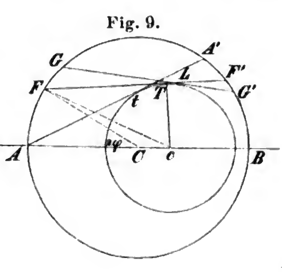
grösseren Kreises, so ist $R > \delta$ also $R - \delta$ positiv, und daher muss

$$r < R - \delta$$

sein, d. h. der kleinere Kreis muss ganz innerhalb des grösseren liegen und denselben nicht schneiden, wenn k^2 ein echter Bruch sein soll. [Anm. Läge der Mittelpunct c ausserhalb des Kreises mit dem Mittelpuncte C, so würde $\delta - R$ positiv sein, und man würde dann $r < \delta - R$ haben. Dann müsste also der Kreis c ganz ausserhalb des Kreises C liegen. Wir wollen hier nur den ersteren Fall verfolgen.]

Um nun zuerst anzudeuten, worauf diese Betrachtungen hinzielen, wollen wir zeigen, dass die beiden Winkel φ und φ', welche den Endpuncten F und F' der Tangente FT zugehören, der elliptischen Differentialgleichung genügen. Zu diesem Ende lassen wir den Winkel φ um einen beliebigen Winkel h wachsen, und es sei (Fig. 9.)

Fig. 9.



$$ACG = 2(\varphi + h), \text{ also } FCG = 2h.$$

Aus G ziehen wir die Tangente GG' an den kleinen Kreis und bezeichnen den dadurch entstehenden Zuwachs des Winkels φ' durch h', sodass

$$ACG' = 2(\varphi' + h') \text{ und } F'CG' = 2h'.$$

Die Winkel h und h' sind beliebige endliche Winkel; man bemerke aber, dass das Verhältniss derselben $\frac{h}{h'}$, wenn beide verschwinden, dem Differentialverhältniss $\frac{d\varphi}{d\varphi'}$ gleich wird, nämlich

$$\lim \frac{h}{h'} = \frac{d\varphi}{d\varphi'} \text{ (für } h = o).$$

Bezeichnet L den Durchschnittspunct der Geraden FF' und GG', und zieht man die Sehnen FG und $F'G'$, so hat man zwei ähnliche Dreiecke FLG und $G'LF'$, mithin

$$\frac{FG}{F'G'} = \frac{FL}{G'L}.$$

Nun ist aber

$$FG = 2R \sin h, \quad F'G' = 2R \sin h',$$

also

$$\frac{FG}{F'G'} = \frac{\sin h}{\sin h'} = \frac{h \frac{\sin h}{h}}{h' \frac{\sin h'}{h'}} = \frac{FL}{G'L}.$$

Lässt man nun h verschwinden, also GG' mit FF' zusammenfallen, so ist

$$\lim \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim \frac{\sin h'}{h'} = 1, \quad \lim \frac{h}{h'} = \frac{d\varphi}{d\varphi'} \text{ (für } h = o),$$

ferner fallen dann die Puncte L und G' resp. mit den Puncten T und F' zusammen, man erhält also

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{FT}{F'T},$$

und wenn man darin die Werthe von FT und $F'T$ aus (2) und (3) substituirt,

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi'}$$

oder

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = o.$$

Die Winkel φ und φ' genügen also wirklich der elliptischen Differentialgleichung und zwar derjenigen für die Subtraction. Ehe wir nun weiter gehen und namentlich Integralgleichungen vorstehender Differentialgleichung, d. h. endliche Beziehungen zwischen den Winkeln φ und φ' auf geometrischem Wege aufsuchen, wollen wir zuerst den Modul k^2 näher betrachten und die zur folgenden Construction nothwendigen Aufgaben lösen.

§ 38.

Den grösseren Kreis mit dem Radius R, sowie den auf der Peripherie des ersteren liegenden Punct A, von welchem an die Winkel φ und φ' gezählt werden, nehmen wir als fest an, und man kann auch an die Vorstellung anknüpfen, dass der Radius R als Längeneinheit angenommen werde, in welchem

Falle die Bögen AF und AF' den Winkeln 2φ und $2\varphi'$ gleich werden.

Wenn ausser dem grösseren Kreise auch noch der kleinere Kreis gegeben ist, so ist damit auch der Modul k gegeben. Wenn aber umgekehrt k gegeben ist, und dies ist bei der Differentialgleichung (4) in der That der Fall, so ist damit der kleinere Kreis noch nicht vollständig gegeben, denn da

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; k^2 = \frac{4\delta R}{(R+\delta)^2 - r^2}$$

ist, so kann man einer der beiden Grössen δ und r, von welchen die Lage und Grösse des kleinen Kreises abhängt, sehr verschiedene Werthe zuertheilen und dann mittelst der vorigen Gleichung und dem gegebenen Werthe von k jedesmal den entsprechenden Werth der anderen Grösse berechnen. Zu einem und demselben Werthe des Moduls k gehört also ein ganzes System von unendlich vielen inneren Kreisen, und es fragt sich, in welcher geometrischen Beziehung alle diese Kreise zu einander stehen.

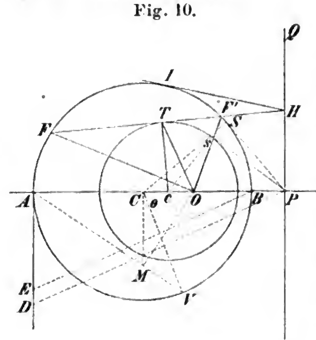
Es soll nun nachgewiesen werden, dass alle diese Kreise, welche zu demselben Werthe des Moduls k gehören, dadurch charakterisirt sind, dass sie mit dem äusseren Kreise eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Tangenten haben.

Es ist bekannt, dass der geometrische Ort für alle Puncte, die die Eigenschaft haben, dass die aus einem dieser Puncte an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten einander gleich sind, eine gerade Linie ist, welcher eben dieser Eigenschaft wegen Steiner den Namen der Linie der gleichen Tangenten gegeben hat. Diese Gerade steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpuncte der beiden Kreise. Schneiden sich die letzteren, so geht jene Gerade durch die beiden Durchschnittspuncte, liegen die Kreise ganz ausser einander, so liegt sie zwischen beiden, und liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so liegt die Linie der gleichen Tangenten ausserhalb beider Kreise und zwar auf derselben Seite, auf welcher der Mittelpunct des inneren Kreises von dem des äusseren aus gerechnet liegt.

Um die Lage der Linie der gleichen Tangenten für zwei gegebene Kreise zu finden, hat man hienach nur nöthig, einen Punct

derselben zu bestimmen. Wir wollen denjenigen Punct P (Fig. 10) zu bestimmen suchen, in welchem die Linie der gleichen Tangenten die Verbindungslinie AB der Mittelpuncte der beiden Kreise C und c schneidet. Es sei PQ die Linie der gleichen Tangenten für die Kreise C und c. Legt man von P aus an die letzteren die Tangenten PS und Ps, so ist der Punct P aus der Bedingung, dass

Fig. 10.



$$PS = Ps$$

sei, zu bestimmen. Es ist aber

$$PS^2 = CP^2 - R^2, \quad Ps^2 = cP^2 - r^2$$

und

$$cP = CP - \delta,$$

also hat man zur Bestimmung der Entfernung CP des Punctes P vom Mittelpunct C die Gleichung

$$CP^2 - R^2 = (CP - \delta)^2 - r^2,$$

aus welcher

$$CP = \frac{R^2 + \delta^2 - r^2}{2\delta}$$

und

$$AP = R + \frac{R^2 + \delta^2 - r^2}{2\delta} = \frac{(R + \delta)^2 - r^2}{2\delta}$$

folgt. Führt man aber hierin k^2 mittelst der Gleichung (5) ein, so erhält man

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad AP = \frac{2R}{k^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Entfernung des Punctes P vom Punkte A nur von k^2 abhängig ist. Wie man also auch sonst die Grössen r und δ, d. h. die Grösse und Lage des inneren Kreises, variiren mag, wenn nur der Modul k denselben Werth beibehält, so bleibt die Linie der gleichen Tangenten PQ unverändert dieselbe.

Es gehört also in der That zu einem gegebenen Werthe des Moduls k eine Schaar von inneren Kreisen, welche alle mit dem äusseren Kreise die nämliche Linie der gleichen Tangenten besitzen; und zugleich folgt aus den oben angeführten Eigenschaf-

ten der Linie der gleichen Tangenten, dass von diesen Kreisen jeder den folgenden ganz umschliesst, und keine zwei dieser Kreise einander schneiden.

Die Formel (6) bietet auch ein leichtes Mittel, für einen gegebenen Werth von k die zugehörige Linie der gleichen Tangenten zu construiren; denn da man diese Gleichung als Proportion so schreiben kann

$$AP : 2R = R : Rk^2,$$

so braucht man nur durch den Punct A eine beliebige Gerade zu ziehen und auf derselben $AD = R$, $AE = Rk^2$ zu machen, dann EB, und DP parallel mit EB, zu ziehen; so ist P der Durchschnittspunct der Linie der gleichen Tangenten mit AB.

Kennt man nun auf diese Weise die zu einem gegebenen Modul zugehörige Linie der gleichen Tangenten, so kann man nachstehende, für die Folge nothwendige, Aufgabe lösen: Aus der zu einem gegebenen Werthe von k gehörigen Schaar von Kreisen denjenigen Kreis zu finden, welcher eine gegebene Sehne des äusseren Kreises berührt.

Es sei FF' die gegebene Sehne. Man construire zuerst die zu dem gegebenen Werthe von k gehörige Linie der gleichen Tangenten PQ, verlängere die gegebene Sehne FF', bis sie die Gerade PQ in H schneidet. Aus H lege man eine Tangente HI an den äusseren Kreis und mache auf der gegebenen Sehne $HT = HI$. Dann ist T der Berührungspunct, und wenn man in T eine Senkrechte auf FF' errichtet, welche die Gerade AB in c schneide, so ist c der Mittelpunct des gesuchten Kreises.

§ 39.

Die so eben erwähnte Aufgabe kann man auch auf eine andere Weise lösen, indem man dazu statt der Linie der gleichen Tangenten einen gewissen Punct benutzt, der auf folgende Weise entsteht. Da die Linie der gleichen Tangenten immer auf derjenigen Seite des Mittelpuncts C liegt, auf welcher sich auch der andere Mittelpunct c befindet, so kann dieser letztere Punct nicht auf die andere Seite hinüber rücken, ohne dass sich die Lage der Linie der gleichen Tangenten ändert, sondern er kann höchstens mit C zusammenfallen. Es ist also 0 der kleinste Werth,

den der Abstand δ annehmen kann. Da man nun die Gleichung (5) schreiben kann

$$r^2 = \frac{k^2(R+\delta)^2 - 4\delta R}{k^2},$$

so zeigt sie, dass für $\delta = o$, $r = R$ wird, dass also dann der innere Kreis mit dem äusseren zusammenfällt. Es fragt sich nun, welches der grösste Werth ist, den δ annehmen kann. Da offenbar δ immer grösser wird, je mehr der Radius r abnimmt (weil nämlich jeder Kreis den folgenden umschliesst und der Mittelpunct stets nach der Seite hinrückt, auf welcher die Linie der gleichen Tangenten liegt), so wird δ seinen grössten Werth erreichen, wenn r verschwindet, wenn der innere Kreis also in einen Punct degenerirt. Wir wollen diesen Punct den Grenzpunct nennen und mit O bezeichnen. Die Lage desselben können wir bestimmen, wenn wir in (5) $\delta = CO$ und $r = o$ setzen, dann erhalten wir

$$k^2 = \frac{4R.\overline{CO}}{(R+CO)^2},$$

oder wenn wir da Complement des Moduls, $k'^2 = 1 - k^2$, ausdrücken,

$$k'^2 = \frac{(R-CO)^2}{(R+CO)^2}.$$

Da nun jedenfalls $CO < R$ ist, weil der Grenzpunct innerhalb des äusseren Kreises liegen muss, wenn für ihn die Linie der gleichen Tangenten ihre Lage nicht verändern soll, so ist

$$k' = \frac{R-CO}{R+CO}, \text{ und daraus folgt } \frac{CO}{R} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Dieser Werth spielt in der Folge eine grosse Rolle; wir bezeichnen ihn mit k_0, setzen also

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k_0 = \frac{1-k'}{1+k'},$$

und nennen ihn den transformirten Modul. Dann wird

$$CO = Rk_0.$$

Hiedurch ist die Lage des Grenzpunctes O bestimmt, man kann hieraus seine Entfernung vom Mittelpuncte C berechnen. Um ihn auch für einen gegebenen Werth von k zu construiren, bestimme man einen Winkel θ so, dass

$$k = \sin\theta,$$

was immer geschehen kann, da k ein echter Bruch ist; dann wird $k' = \cos\theta$ und

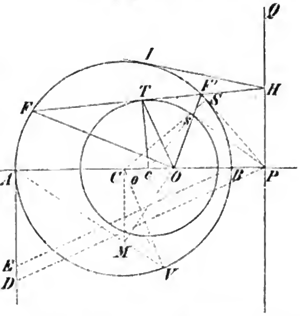
$$k_0 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta, \quad \text{also} \quad CO = R \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Man mache nun (Fig. 10) VCB gleich dem gegebenen Winkel θ und ziehe VA, so ist $VAB = \frac{1}{2}\theta$. Errichtet man dann in C eine Senkrechte auf AB, welche die Gerade AV in M schneide, so ist $CM = R \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$. Errichtet man ferner in M eine Senkrechte auf AV, welche AB in O schneide, so ist auch $CMO = \frac{1}{2}\theta$, also

$$CO = CM \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta = R \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

mithin O der gesuchte Grenzpunct.

Fig. 10.



Da der Grenzpunct O die Stelle eines der inneren Kreise vertritt, so nimmt jede durch ihn hindurchgehende Gerade die Stelle einer an einen inneren Kreis gelegten Tangente ein. Man kann also mit Hülfe der Linie der gleichen Tangenten den Grenzpunct O auch dadurch finden, dass man $PO = PS = Ps$ macht. Ferner kann man auf den Grenzpunct auch die Gleichung (1), nämlich

$$FT = \frac{2\sqrt{\delta R}}{k}\, \Delta\varphi$$

anwenden, wenn man darin statt FT und δ resp. FO und CO setzt, dann erhält man (Fig. 10)

$$FO = \frac{2\sqrt{CO.R}}{k}\, \Delta\varphi,$$

und wenn man diese Gleichungen durch einander dividirt,

$$\frac{FT}{FO} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{CO}} \quad \text{oder} \quad \frac{FT}{\sqrt{\delta}} = \frac{FO}{\sqrt{CO}}.$$

Da nun die Lage des Grenzpuncts O nur von dem Werthe von k, nicht aber von der Lage des Punctes F, d. h. von dem Werthe von φ, abhängig ist, so zeigt die zweite Gleichung, dass, wenn

man den kleinen Kreis, also δ variirt, dagegen F festhält, das Verhältniss

$$\frac{FT}{\sqrt{\delta}}$$

constant bleibt. Die erste Gleichung aber zeigt, dass, wenn man einen kleinen Kreis festhält und den Punct F sich verändern lässt, das Verhältniss

$$\frac{FT}{FO}$$

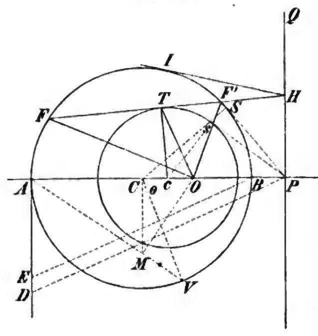
stets denselben Werth beibehält. Wendet man diesen Satz auf den anderen Endpunct F' der Sehne FF' an, so folgt

$$\frac{FT}{FO} = \frac{F'T}{F'O},$$

und daraus nach einem bekannten Satze, dass die nach dem Berührungspuncte T gerichtete Gerade OT den Winkel zwischen den Geraden OF und OF' halbirt.

Hiedurch ist nun ein anderes Mittel gegeben, die obige Aufgabe zu lösen, nämlich denjenigen Kreis aus der zu einem gegebenen Werthe von k oder θ gehörigen Schaar zu finden, der eine gegebene Sehne FF' berührt. Man construirt (Fig. 10) zuerst auf die oben angegebene Weise den zu dem gegebenen Werthe von k gehörenden Grenzpunct O, zieht OF und OF' und halbirt den Winkel FOF'. Die Halbirungslinie OT trifft dann die Sehne FF' im Berührungspuncte T, und hat man diesen, so findet man, wie oben, auch den Mittelpunct c.

Fig. 10.



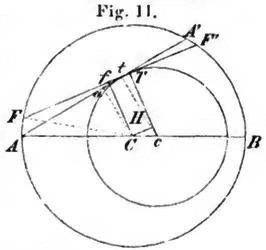
§ 40.

Wir kehren jetzt zu der Differentialgleichung (4) zurück,

$$\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = o,$$

welche für die den Endpuncten F und F' einer beliebigen Sehne zugehörigen Winkel φ und φ' gilt, wenn diese Sehne irgend einen Kreis aus der zu k^2 gehörigen Schaar berührt. Wir suchen Integralgleichungen zu dieser Differentialgleichung, d. h. endliche Beziehungen zwischen den Winkeln φ und φ'. Wenn eine solche die irgend einen inneren Kreis bestimmenden Stücke enthält, so wird sie eine constante Grösse mehr enthalten, als die Differentialgleichung und daher eine vollständige Integralgleichung sein.

Fig. 11.



Fällen wir aus dem Mittelpuncte C (Fig. 11) eine Senkrechte Cf auf FF', so erhalten wir sogleich zwei Integralgleichungen durch die Relationen

(8) . . $Ff = \frac{1}{2}(FT + F'T), \quad fT = \frac{1}{2}(FT - F'T).$

Denn da nach (2) und (3)

$$FT = At\,\Delta\varphi, \quad F'T = At\,\Delta\varphi'$$

ist, so haben wir nur noch Ff und fT auszudrücken. Es ist aber

$$FCF' = 2(\varphi' - \varphi), \quad \text{also} \quad FCf = \varphi' - \varphi,$$

mithin

(9) . . $Ff = R \sin(\varphi' - \varphi), \quad Cf = R \cos(\varphi' - \varphi).$

Zieht man ferner cT, und CH senkrecht auf cT, so ist $fCA = \varphi' + \varphi$, also $fCc = 180^0 - (\varphi' + \varphi)$, $HCc = 90^0 - (\varphi' + \varphi)$ und daher

(10) . $fT = \delta \sin(\varphi' + \varphi), \quad cH = \delta \cos(\varphi' + \varphi).$

Setzt man diese Werthe in (8) hinein, so erhält man

$$R \sin(\varphi' - \varphi) = \tfrac{1}{2} At\,(\Delta\varphi + \Delta\varphi')$$
$$\delta \sin(\varphi' + \varphi) = \tfrac{1}{2} At\,(\Delta\varphi - \Delta\varphi')$$

oder

(11) . . . $\frac{\Delta\varphi + \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{2R}{At}; \quad \frac{\Delta\varphi - \Delta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)} = \frac{2\delta}{At}.$

Beides sind vollständige Integralgleichungen mit den willkürlichen Constanten At und $\frac{\delta}{At}$. Um nun diese durch eine auszudrücken, wählen wir dazu, wie es schon früher geschah, denjenigen Werth von φ', welcher dem Werthe $\varphi = o$ entspricht, diesen bezeich-

nen wir mit α und können ihn leicht construiren. Wir brauchen nur die aus A an den innern Kreis gelegte Tangente At zu verlängern, bis sie den äusseren Kreis zum zweiten Male in A' schneidet, dann ist der dem Puncte A' zugehörige Centriwinkel

$$ACA' = 2\alpha,$$

und aus der in den vorigen §§ gelösten Aufgabe erhellt, dass, sobald α gegeben ist, damit auch ein bestimmter Kreis aus der zu k gehörigen Schaar gegeben ist.

Setzt man nun in den Gleichungen (11) $\varphi = o$ und $\varphi' = \alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{2R}{At} = \frac{1 + \varDelta\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{2\delta}{At} = \frac{1 - \varDelta\alpha}{\sin\alpha}$$

und daraus

$$(12) \quad \ldots \ldots \ldots \delta = R\,\frac{1 - \varDelta\alpha}{1 + \varDelta\alpha}.$$

Zieht man auch noch Ca senkrecht auf At und ausserdem $ct = r$, so folgt, weil $ACa = Act = \alpha$ ist,

$$(13) \quad \ldots \quad r = (R + \delta)\cos\alpha = \frac{2R\cos\alpha}{1 + \varDelta\alpha}.$$

Durch die Einführung von α werden nun die Gleichungen (11)

$$\frac{\varDelta\varphi + \varDelta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{1 + \varDelta\alpha}{\sin\alpha}; \quad \frac{\varDelta\varphi - \varDelta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)} = \frac{1 - \varDelta\alpha}{\sin\alpha}.$$

Aus ihnen folgt durch Addition

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\varDelta\varphi + \varDelta\varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} + \frac{\varDelta\varphi - \varDelta\varphi'}{\sin(\varphi' + \varphi)}$$

$$= \frac{[\sin(\varphi' + \varphi) + \sin(\varphi' - \varphi)]\,\varDelta\varphi + [\sin(\varphi' + \varphi) - \sin(\varphi' - \varphi)]\,\varDelta\varphi'}{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi}$$

also

$$\sin\alpha = \frac{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi\,\varDelta\varphi + \sin\varphi\cos\varphi'\,\varDelta\varphi'}.$$

Diese Gleichung ist von der im § 27 umgeformten Gleichung (21) fast nicht verschieden. Wiederholt man hier die dort vollzogenen Operationen, so erhält man

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi\,\varDelta\varphi - \sin\varphi\cos\varphi'\,\varDelta\varphi'}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'}$$

und damit unsere bekannte Formel für den Sinus der Amplitude einer Differenz. In der That wird durch gliedweise Integration der Differentialgleichung (4) und durch Einführung von α

$$\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\Delta\alpha},$$

also wenn man

$$\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = u', \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = a$$

setzt,

$$a = u' - u$$

und

$$\varphi' = am\, u', \quad \varphi = am\, u, \qquad \alpha = am\, a = am\, (u' - u).$$

Noch eine dritte Integralgleichung, die zugleich direct die Lagrange'sche Formel liefert, erhält man folgendermassen. Es ist

$$r = cT = Cf + cH,$$

und wenn man die Gleichungen (9) und (10) anwendet.

(14) . . $r = R \cos(\varphi' - \varphi) + \delta \cos(\varphi' + \varphi)$.

Drückt man darin r und δ mittelst (12) und (13) durch α aus, so erhält man

$$\frac{2 \cos \alpha}{1 + \Delta\alpha} = \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1 - \Delta\alpha}{1 + \Delta\alpha} \cos(\varphi' + \varphi)$$

oder

$$2 \cos \alpha = (1 + \Delta\alpha) \cos(\varphi' - \varphi) + (1 - \Delta\alpha) \cos(\varphi' + \varphi),$$

mithin

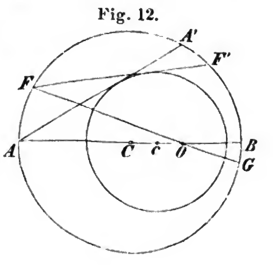
(15) . . $\cos \alpha = \cos \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi' \sin \varphi\, \Delta\alpha$,

welches die Lagrange'sche Formel ist.

§ 41.

Hiedurch ist nun ein bequemes Mittel gegeben, die Amplitude der Summe oder Differenz zweier Argumente geometrisch zu construiren. Denn zieht man die beiden den inneren Kreis berührenden Sehnen, FF' und AA' (Fig. 12), nimmt den Radius des äusseren Kreises als Längeneinheit an und setzt die Kreisbögen

Fig. 12.



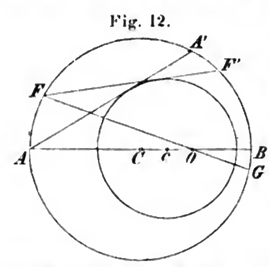
$$AF = 2am\, u, \quad AF' = 2am\, u',$$
$$AA' = 2am\, a,$$

so ist

$$u' - u = a, \quad u' = u + a.$$

Ist also nun zuerst $am\ u$ und $am\ u'$ nebst dem dazu gehörigen Modul k gegeben, so nehme man auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius die Längeneinheit ist, einen beliebigen Punct A an und mache die von A an nach derselben Richtung gezählten Kreisbögen

Fig. 12.



$$AF = 2am\ u, \quad AF' = 2am\ u',$$

ziehe die Sehne FF' und construire nach einer der in den §§ 38 und 39 gelehrten Methoden den zu k gehörigen kleinen Kreis, welcher die Sehne FF' berührt. Legt man dann von A eine Tangente AA' an den nämlichen Kreis, so ist der Bogen

$$AA' = 2am\ a = 2am\ (u' - u).$$

Um ferner die Amplitude der Summe zu construiren, sei ausser dem Modul k, $am\ u$ und $am\ a$ gegeben. Man mache

$$AF = 2am\ u, \quad AA' = 2am\ a,$$

ziehe die Sehne AA' und construire den zu k gehörigen kleinen Kreis, welcher die Sehne AA' berührt. Legt man dann von F an den nämlichen Kreis die Tangente FF', so ist der Bogen

$$AF' = 2am\ u' = 2am\ (u + a).$$

In dem besonderen Falle, dass das Argument a dem vollständigen Integral K gleich ist, hat man

$$am\ K = \frac{\pi}{2}, \quad 2\ am\ K = \pi.$$

Der Endpunct A' des Bogens, welcher gleich $2am\ K$ ist, fällt daher nach B, die Sehne AA' wird zum Durchmesser AB, und der denselben berührende, zu k gehörige, kleine Kreis schrumpft in den Grenzpunct O zusammen. Ist daher wieder $AF = 2am\ u$, so ziehe man durch F und O die Gerade FOG, und erhält dann

$$AG = 2am\ (u + K).$$

Hieraus folgt zugleich: Sind zwei Bögen AF und AG so beschaffen, dass die Argumente der diese Bögen darstellenden Amplituden um die Grösse K von einander verschieden sind, so geht die die

Endpuncte F und G dieser Bögen verbindende Sehne durch den Grenzpunct O.

Es hat nun keine Schwierigkeit, diese Construction auf mehrere Summanden auszudehnen. Es seien die Bögen (Fig. 13)

Fig. 13.

$$AF = 2am\, u,\quad AA' = 2am\, a,$$
$$AB' = 2am\, b,\quad AC' = 2am\, c,$$

so findet man zuerst wie vorhin

$$AF' = 2am\,(u + a).$$

Zieht man nun die Sehne AB' und construirt den zu k gehörigen, diese Sehne berührenden, Kreis und legt von F' an diesen Kreis die Tangente $F'F''$, so ist

$$AF'' = 2am\,(u + a + b).$$

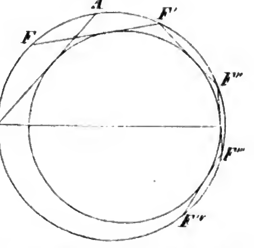
Man ziehe ferner die Sehne AC' und zeichne den dieselbe berührenden, zu k gehörigen, Kreis, lege an letzteren aus F'' die Tangente $F''F'''$, so ist

$$AF''' = 2am\,(u + a + b + c);$$

und in derselben Weise kann man fortfahren. Zu bemerken ist aber, dass alle diese Kreisbögen nach derselben Richtung und auch über 360° hinaus gezählt werden müssen. Man bemerke ferner, dass die sämmtlichen inneren Kreise nur von a, b, c, etc., nicht aber von u, also auch nicht von der Lage des Punctes F abhängen.

Sind die Argumente a, b, c, etc. alle einander gleich und gleich a, so fallen die Puncte B', C', etc. alle mit dem Punct A' zusammen (Fig. 14), also fallen auch alle kleinen Kreise mit dem die Sehne AA' berührenden zusammen. Legt man also an diesen Kreis nach und nach die Tangenten $FF', F'F'', F''F''', F'''F^{IV}$, etc., so sind die Bögen

Fig. 14.



$$AF = 2\,am\,u,\quad AF' = 2\,am\,(u + a),\quad AF'' = 2\,am\,(u + 2a)$$
$$AF''' = 2\,am\,(u + 3a),\quad AF^{IV} = 2\,am\,(u + 4a),\ \text{etc.}$$

Ist endlich auch $a = u$, so fällt der Punct A' nach F, der innere Kreis muss daher dann die Sehne AF berühren, und zieht man die Tangenten wie vorhin, so ist nun (Fig. 15)

Fig. 15.

$$AF = 2\ am\ u, \quad AF' = 2\ am\ 2u,$$
$$AF'' = 2\ am\ 3\ u$$
$$AF''' = 2\ am\ 4\ u, \quad AF^{IV} = 2\ am\ 5u,$$

etc., wodurch eine geometrische Construction für die Vervielfachung der elliptischen Functionen gegeben ist.

§ 42.

Wir können nun auch aus dem Vorigen die zur Vervielfachung dienenden Formeln ableiten. Dazu gehen wir von der Gleichung (14) des § 40 aus, nämlich von der Gleichung

$$r = R\cos(\varphi' - \varphi) + \delta\cos(\varphi' + \varphi),$$

Fig. 14.

worin (Fig. 14)

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi &= AF = 2\,am\,u, \\ 2\varphi' &= AF' = 2\,am\,(u+a) \\ &\text{ist. Setzt man nun noch} \\ 2\varphi'' &= AF'' = 2\,am\,(u+2a), \\ 2\varphi''' &= AF''' = 2\,am\,(u+3a) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

u. s. w., so hat man, da r und δ zu dem unverändert bleibenden inneren Kreise gehören,

$$r = R\cos(\varphi' - \varphi) + \delta\cos(\varphi' + \varphi)$$
$$r = R\cos(\varphi'' - \varphi') + \delta\cos(\varphi'' + \varphi')$$
$$r = R\cos(\varphi''' - \varphi'') + \delta\cos(\varphi''' + \varphi'')$$

u. s. w.

Diese Formeln kann man auch in folgender Gestalt schreiben:

$$r = (R + \delta)\cos\varphi'\cos\varphi + (R - \delta)\sin\varphi'\sin\varphi$$
$$r = (R + \delta)\cos\varphi''\cos\varphi' + (R - \delta)\sin\varphi''\sin\varphi'$$
$$r = (R + \delta)\cos\varphi'''\cos\varphi'' + (R - \delta)\sin\varphi'''\sin\varphi''$$

u. s. w.

Zieht man nun jede von der folgenden ab, so erhält man zuerst aus dem ersten Paar

$$o = (R+\delta)\cos\varphi'(\cos\varphi'' - \cos\varphi) + (R-\delta)\sin\varphi'(\sin\varphi'' - \sin\varphi)$$

oder

$$\frac{R-\delta}{R+\delta}\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi''}{\sin\varphi'' - \sin\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi''+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi''-\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi''+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi''-\varphi}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\varphi''+\varphi}{2}.$$

Aus (12) folgt aber

$$R+\delta = \frac{2R}{1+\Delta\alpha}, \qquad R-\delta = \frac{2R\,\Delta\alpha}{1+\Delta\alpha},$$

also ist

$$\frac{R-\delta}{R+\delta} = \Delta\alpha,$$

und man erhält daher

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi''+\varphi}{2} = \operatorname{tg}\varphi'\,\Delta\alpha,$$

und ebenso, indem man die Accente um einen vermehrt

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi'''+\varphi'}{2} = \operatorname{tg}\varphi''\,\Delta\alpha$$

u. s. w.

Führt man nun für φ, φ', etc. die Werthe (16) ein und erinnert sich, dass $\alpha = am\,a$ war, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{am(u+2a)+am\,u}{2} = \operatorname{tg} am(u+a)\,\Delta\,am\,a$$

$$\operatorname{tg}\frac{am(u+3a)+am(u+a)}{2} = \operatorname{tg} am(u+2a)\,\Delta\,am\,a.$$

u. s. w.

Setzt man nun hierin noch $a = u$, so folgt

$$\operatorname{tg}\frac{am\,3u+am\,u}{2} = \operatorname{tg} am\,2u\;\Delta\,am\,u$$

$$\operatorname{tg}\frac{am\,4u+am\,2u}{2} = \operatorname{tg} am\,3u\;\Delta\,am\,u$$

u. s. w.

Diese Formeln dienen zur successiven Berechnung von $\operatorname{tg} am\,3u$, $\operatorname{tg} am\,4u$, etc. aus $\operatorname{tg} am\,u$ und $\Delta\,am\,u$. Es fehlt uns nur noch eine Formel für $\operatorname{tg} am\,2u$, die wir aber aus dem Früheren leicht

herstellen können. Aus den Formeln 1) und 2) des § 29 folgt nämlich sogleich

$$\operatorname{tg} am\, 2u = \frac{2 \sin am\, u \cos am\, u\, \Delta am\, u}{\cos^2 am\, u - \sin^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u}$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} am\, u\, \Delta am\, u}{1 - \operatorname{tg}^2 am\, u\, \Delta^2 am\, u}.$$

§ 43.

Kehren wir noch einmal zur Fig. 13 zurück. Im § 41 ist gezeigt worden, dass, wenn man die Bögen

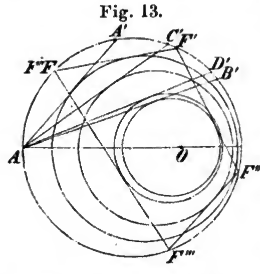
$$AF = 2am\, u,\ AA' = 2am\, a,\ AB' = 2am\, b,\ AC' = 2am\, c$$

macht und die Sehnen FF', $F'F''$, $F''F'''$ in der angegebenen Weise construirt, die Bögen

$$AF' = 2\, am\, (u + a),\quad AF'' = 2am\, (u + a + b)$$
$$AF''' = 2am\, (u + a + b + c)$$

sind. Jene Sehnen bilden einen Theil eines in den äusseren Kreis eingeschriebenen Vielecks. Schliesst man nun das Vieleck, welches in unserer Figur ein Viereck ist, durch Ziehen der Sehne $F''' F^{IV}$, wo wir also den Punct F^{IV} mit F zusammenfallend annehmen, so wird es auch einen zum Modul k gehörigen Kreis geben, der diese Sehne berührt, weil man zu jeder beliebigen Sehne einen solchen Kreis nach § 38 oder 39 finden kann. Um aber diesen Kreis unabhängig von der Sehne $F''' F^{IV}$ finden zu können, legen wir an ihn von A aus die Tangente AD' und setzen

Fig. 13.



$$\text{Bogen } AD' = 2\, am\, d,$$

dann ist der über 360° hinaus gezählte Bogen

$$AF^{IV} = 2\, am\, (u + a + b + c + d).$$

Da nun aber der Punct F^{IV} mit F zusammenfällt, so ist

$$AF^{IV} = 2\pi + AF,$$

also

$$2am\, (u + a + b + c + d) = 2\pi + 2am\, u,$$

oder

$$am(u + a + b + c + d) = \pi + am\, u = am\,(u + 2K)\ (§\ 7),$$

folglich

$$a + b + c + d = 2K.$$

Bestimmt man also $AD' = 2am\, d$ so, dass

$$d = 2K - (a + b + c),$$

so wird der die Sehne AD' berührende Kreis so liegen, dass die aus F''' an ihn gezogene Tangente durch den Punct F hindurchgeht.

Es ist ersichtlich, dass die hier für ein Viereck ausgeführte Betrachtung sich ohne Weiteres auf ein Vieleck von beliebig vielen, n, Seiten ausdehnen lässt. Bezeichnen wir die Ecken desselben mit

$$F,\ F',\ F'' \ldots\ldots F^{(n)},$$

wo der letzte Punct $F^{(n)}$ mit dem ersten F zusammenfallend gedacht werde, so kann auch der Fall eintreten, dass dieses Zusammenfallen nicht nach einmaligem Umlaufe um die Peripherie eintritt, sondern erst etwa nach m Umläufen. Dann ändert sich im Vorigen nur das, dass an die Stelle der Gleichung $a+b+c+d=2K$ die folgende

$$a + b + c + d + \ldots\ldots = 2mK$$

tritt. Wichtig aber ist, daran zu erinnern, dass die Argumente a, b, c, etc. und auch das letzte derselben, durch welches derjenige Kreis bestimmt wird, der die das Vieleck schliessende $n$te Seite desselben berührt, von u und also auch von der Lage des ersten Eckpunctes F ganz unabhängig ist. Dieser letzte Kreis bleibt also mit den übrigen Kreisen unverändert derselbe, wenn der Punct F und mit ihm die Puncte F', F'', etc. ihre Lage auf der Peripherie des äusseren Kreises ändern.

Nach diesem allen erhält man nun folgenden Satz:

Hat man eine Schaar ineinanderliegender Kreise, welche alle eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Tangenten besitzen, und bewegen sich die Ecken eines n-Ecks auf der Peripherie des äussersten Kreises, während die $(n-1)$ ersten Seiten desselben sich jede auf einem Kreise aus der genannten Schaar wälzen, so wälzt sich auch die $n$te Seite auf einem Kreise aus dieser Schaar.

Besonders wichtig ist nun der Fall, wenn die Argumente a, b, c, etc. alle einander gleich sind, dann fallen die Sehnen AA', AB', AC', AD', etc. alle in eine zusammen, also auch die diese Sehnen berührenden Kreise, und das Vieleck ist dann dem äusseren Kreise eingeschrieben und zugleich dem inneren Kreise umgeschrieben (Fig. 16). Setzt man in diesem Falle

$$b = c = d = \dots = a,$$

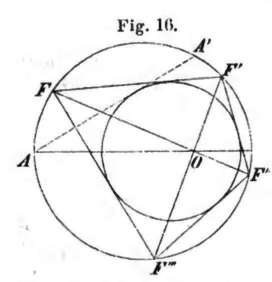


Fig. 16.

und nennt die Anzahl der vorhandenen Argumente n, sodass dies auch die Anzahl der Seiten ist, so geht die Gleichung

$$a + b + c + \dots = 2K$$

über in

$$na = 2K,$$

aus welcher

$$a = \frac{2K}{n}$$

folgt. Der Bogen AA', dessen Sehne den inneren Kreis berührt, ist also

$$\text{Bog. } AA' = 2\, am\, \frac{2K}{n}.$$

Hiedurch ist nun ganz allgemein die Aufgabe gelöst, zu einem gegebenen Kreise einen zweiten Kreis zu finden von der Beschaffenheit, dass man um ihn ein Vieleck von einer gegebenen Anzahl von Seiten beschreiben kann, dessen Ecken zugleich in der Peripherie des ersten Kreises liegen.

Ist nämlich n die Anzahl der Seiten des Vielecks, so nehme man einen beliebigen Werth für k an und berechne den Werth von $am\, \frac{2K}{n}$.*) Man mache dann den von einem beliebigen Puncte A der Peripherie des äusseren Kreises, dessen Radius als Längeneinheit angenommen werde, gezählten Bogen $AA' = 2am\, \frac{2K}{n}$, ziehe die Sehne AA' und construire den dieselbe berührenden, zu k gehörigen, Kreis, so hat der letztere die verlangte Eigenschaft.

---

*) Ueber die Berechnung von K aus k, sowie der Amplitude zu einem gegebenen Argument siehe unten § 47.

Da der Werth des Moduls k beliebig angenommen werden kann, so ist die Aufgabe eine unbestimmte, und es giebt unendlich viele Auflösungen derselben. Für den besonderen Fall, dass man $k = o$ setzt, wird $am\,\frac{2K}{n} = \frac{2K}{n}$, und da dann $K = \frac{\pi}{2}$ ist, Bog. $AA' = 2\,\frac{2\pi}{n2} = \frac{2\pi}{n}$. Die Linie der gleichen Tangenten rückt dann ins Unendliche, der innere Kreis wird mit dem äusseren concentrisch, und daher das n-Eck ein regelmässiges.

Der Werth des Bogens AA', von welchem die Lösung der Aufgabe abhängt, ist von dem Werthe von u, d. h. von der Lage des Punctes F, ganz unabhängig. Hat man daher zwei Kreise gefunden, welche der Aufgabe genügen, so kann man von einem beliebigen Puncte der Peripherie des äusseren Kreises das n-Eck zu zeichnen beginnen, es wird sich stets schliessen.

Unter den Vielecken, welche einem Kreise um- und einem anderen Kreise eingeschrieben sind, besitzen diejenigen, deren Seitenanzahl eine gerade Zahl ist, noch eine merkwürdige Eigenschaft. Setzt man nämlich

$$n = 2m,$$

so wird

$$a = \frac{2K}{n} = \frac{K}{m}.$$

Bezeichnet man nun die Ecken des $2m$-Ecks mit

$$F,\ F',\ F'',\ \ldots\ldots\ F^{(2m)},$$

so sind die Eckenpaare

$$FF^{(m)},\ F'F^{(m+1)},\ \text{etc.}$$

gegenüberstehende Ecken. Ferner sind die Bögen

$$AF = 2\ am\ u,\quad AF' = 2\ am\ (u + a),\quad AF'' = 2\ am\ (u + 2a)$$

$$\ldots\ldots\ AF^{(m)} = 2\ am\,(u + ma),\ AF^{(m+1)} = 2\,am\ (u + (m+1)\ a), \text{etc.}$$

Also sind die Bögen, deren Endpuncte die beiden gegenüberstehenden Ecken F und $F^{(m)}$ sind, wenn man den Werth von a einsetzt,

$$AF = 2am\ u,\quad AF^{(m)} = 2am\ (u + K).$$

Die Argumente der Amplituden haben also K zum Unterschiede, folglich geht nach § 41 die Sehne oder Diagonale $FF^{(m)}$ durch den Grenzpunct O. Für das folgende Paar gegenüberstehender Ecken F' und $F^{(m+1)}$ ist

$$AF' = 2\,am\left(u + \frac{K}{m}\right),\quad AF^{(m+1)} = 2\,am\left(u + \frac{K}{m} + K\right).$$

Der Unterschied der Argumente ist also wieder gleich K, folglich geht auch die Diagonale $F'F^{(m+1)}$ durch den Grenzpunct. Dasselbe findet bei allen folgenden Paaren gegenüberstehender Ecken statt. Da nun der Grenzpunct nur von k abhängig, von u aber unabhängig ist, so hat man folgenden Satz:

Bei einem Vieleck von einer geraden Anzahl von Seiten, welches einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umschrieben ist, schneiden sich die Diagonalen, welche je zwei gegenüberstehende Ecken verbinden, in ein und demselben Puncte, und dieser bleibt unverändert, wenn das Vieleck sich dreht, d. h. wenn seine Ecken auf der Peripherie des äusseren Kreises fortgleiten, während seine Seiten sich auf dem inneren Kreise wälzen.

§ 44.

Es bleibt nun noch übrig, für einige specielle Annahmen von n, der Anzahl der Seiten des Vielecks, die Relationen zwischen den Radien R, r der beiden Kreise und der Distanz δ ihrer Mittelpuncte zu finden, welche stattfinden müssen, damit man das n-Eck dem einen Kreise um- und dem andern Kreise einschreiben könne. Dazu führen die Formeln (12) und (13) des § 40, aus welchen

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \frac{r}{R+\delta} = \cos\alpha,\quad \frac{R-\delta}{R+\delta} = \Delta\alpha$$

folgt, und in welchen $\alpha = am\,a$ war. Da nun

$$a = \frac{2K}{n}$$

zu setzen ist, so hat man

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am\,\frac{2K}{n},\quad \frac{R-\delta}{R+\delta} = \Delta\,am\,\frac{2K}{n}.$$

Diese beiden Gleichungen sind so lange von einander unabhängig, als man für den Modul k nicht den bestimmten, früher gegebenen Ausdruck durch R, r und δ annimmt. Eliminirt man also k aus ihnen, so wird man die gesuchten Relationen erhalten. Es wird also darauf ankommen, für jede specielle Annahme

von n eine Beziehung zwischen $\cos am \frac{2K}{n}$ und $\Delta\, am \frac{2K}{n}$ zu finden.

Es sei zuerst $n = 3$, das Vieleck also ein Dreieck,

$$a = \tfrac{2}{3} K.$$

Wir benutzen nun die Lagrange'sche Gleichung (15) § 40

$$(18) \quad . \quad . \quad \cos\alpha = \cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin\varphi\, \Delta\alpha,$$

in welcher $\alpha = am\, a$, $\varphi = am\, u$, $\varphi' = am\,(u + a)$ ist, und setzen

$$\alpha = am \frac{2K}{3}, \quad \varphi = am \frac{2K}{3}, \quad \text{also } \varphi' = am \frac{4K}{3}.$$

Dann ist

$$\cos am \tfrac{2}{3} K = \cos am \tfrac{4}{3} K \cos am \tfrac{2}{3} K + \sin am \tfrac{4}{3} K \sin am \tfrac{2}{3} K\, \Delta\, am \tfrac{2}{3} K.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{4}{3} K = 2K - \tfrac{2}{3} K$$

und allgemein

$$\sin am\,(2K - u) = \sin am\, u, \quad \cos am\,(2K - u) = -\cos am\, u,$$
$$\Delta\, am\,(2K - u) = \Delta\, am\, u,$$

also

$$\cos am \tfrac{2}{3} K = -\cos^2 am \tfrac{2}{3} K + \sin^2 am \tfrac{2}{3} K\, \Delta\, am \tfrac{2}{3} K$$
$$= -\cos^2 am \tfrac{2}{3} K + (1 - \cos^2 am \tfrac{2}{3} K)\, \Delta\, am \tfrac{2}{3} K,$$

oder

$$o = (1 + \cos am \tfrac{2}{3} K)\,(-\cos am \tfrac{2}{3} K + (1 - \cos am \tfrac{2}{3} K)\, \Delta\, am \tfrac{2}{3} K),$$

also, da $\cos am \frac{2}{3} K$ von -1 verschieden, und daher $1 + \cos am \frac{2}{3} K$ nicht gleich o ist,

$$\cos am \tfrac{2}{3} K + \frac{\cos am \frac{2}{3} K}{\Delta\, am \frac{2}{3} K} = 1.$$

Setzt man nun die Werthe aus (17) ein, nach denen auch

$$\frac{\cos\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{r}{R - \delta}$$

ist, so erhält man die Relation für das Dreieck

$$\frac{r}{R + \delta} + \frac{r}{R - \delta} = 1,$$

welche von Euler zuerst aufgestellt worden ist.

Es sei zweitens $n = 4$,

$$a = \frac{2K}{4} = \tfrac{1}{2} K.$$

Dann ist

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am \tfrac{1}{2} K, \quad \frac{r}{R-\delta} = \frac{\cos am \frac{1}{2} K}{\Delta am \frac{1}{2} K}.$$

Erinnert man sich aber der Formel

$$\frac{\cos am u}{\Delta am u} = \sin am (K - u),$$

so folgt

$$\frac{r}{R+\delta} = \cos am \tfrac{1}{2} K, \quad \frac{r}{R-\delta} = \sin am (K - \tfrac{1}{2} K) = \sin am \tfrac{1}{2} K,$$

mithin erhält man, wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt, die Relation für das Viereck

$$\left(\frac{r}{R+\delta}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-\delta}\right)^2 = 1.$$

Zuletzt wollen wir noch die Relation für das Fünfeck suchen, also

$$a = \tfrac{2}{5} K$$

annehmen. Hier benutzen wir zuerst wieder die Gleichung (18), indem wir

$$\alpha = am \tfrac{2}{5} K, \quad \varphi = am \tfrac{2}{5} K, \quad \varphi' = am \tfrac{4}{5} K$$

setzen, und erhalten

$$(19) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos am \tfrac{2}{5} K = \cos am \tfrac{4}{5} K \cos am \tfrac{2}{5} K \\ &\quad + \sin am \tfrac{4}{5} K \sin am \tfrac{2}{5} K \, \Delta am \tfrac{2}{5} K. \end{aligned} \right.$$

Setzt man aber in der Lagrange'schen Gleichung für die Summe (§ 26. S. 109)

$$\cos \sigma = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \, \Delta\sigma,$$

in welcher

$$\varphi = am u, \quad \psi = am v, \quad \sigma = am (u + v)$$

ist,

$$u = \tfrac{4}{5} K, \quad v = \tfrac{4}{5} K, \quad u + v = \tfrac{8}{5} K,$$

so erhält man

$$\cos am \tfrac{8}{5} K = \cos^2 am \tfrac{4}{5} K - \sin^2 am \tfrac{4}{5} K \, \Delta am \tfrac{8}{5} K.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{8}{5} K = 2K - \tfrac{2}{5} K,$$

also ist auch

$$-\cos am\,\tfrac{2}{5}K = \cos^2 am\,\tfrac{4}{5}K - \sin^2 am\,\tfrac{4}{5}K\,\Delta\,am\,\tfrac{2}{5}K$$
$$= 1 - \sin^2 am\,\tfrac{4}{5}K\,(1 + \Delta\,am\,\tfrac{2}{5}K)$$
$$= \cos^2 am\,\tfrac{4}{5}K\,(1 + \Delta\,am\,\tfrac{2}{5}K) - \Delta\,am\,\tfrac{2}{5}K,$$

und daraus ergiebt sich

$$\sin am\,\tfrac{4}{5}K = \sqrt{\frac{1+\cos am\,\frac{2}{5}K}{1+\Delta\,am\,\frac{2}{5}K}},$$

$$\cos am\,\tfrac{4}{5}K = \sqrt{\frac{\Delta\,am\,\frac{2}{5}K - \cos am\,\frac{2}{5}K}{1+\Delta\,am\,\frac{2}{5}K}}.$$

Substituirt man dies in (19), so kommt

$$\cos am\,\tfrac{2}{5}K = \cos am\,\tfrac{2}{5}K\sqrt{\frac{\Delta\,am\,\frac{2}{5}K - \cos am\,\frac{2}{5}K}{1+\Delta\,am\,\frac{2}{5}K}}$$
$$+ \sin am\,\tfrac{2}{5}K\,\Delta\,am\,\tfrac{2}{5}K\sqrt{\frac{1+\cos am\,\frac{2}{5}K}{1+\Delta\,am\,\frac{2}{5}K}}.$$

Setzt man darin der Kürze wegen $am\,\frac{2}{5}K = \alpha$ und drückt den Sinus durch den Cosinus aus, so erhält man zunächst die gesuchte Relation zwischen $\cos\alpha$ und $\Delta\alpha$

$$\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{\frac{\Delta\alpha - \cos\alpha}{1+\Delta\alpha}} + \Delta\alpha\,(1 + \cos\alpha)\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\Delta\alpha}}.$$

Substituirt man darin jetzt die Werthe (17), so wird

$$\frac{\Delta\alpha - \cos\alpha}{1+\Delta\alpha} = \frac{R-\delta-r}{2R};\quad \frac{1-\cos\alpha}{1+\Delta\alpha} = \frac{R+\delta-r}{2R},$$

also

$$\frac{r}{R+\delta} = \frac{r}{R+\delta}\sqrt{\frac{R-\delta-r}{2R}} + \frac{R-\delta}{R+\delta}\cdot\frac{R+\delta+r}{R+\delta}\sqrt{\frac{R+\delta-r}{2R}}$$

oder

$$r\,(R+\delta)\sqrt{2R} = r\,(R+\delta)\sqrt{R-\delta-r}$$
$$+ (R-\delta)\,(R+\delta+r)\sqrt{R+\delta-r}\,\text{*)}.$$

---

*) Vgl. Richelot. Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie. Crelle's Journ. Bd. 38.

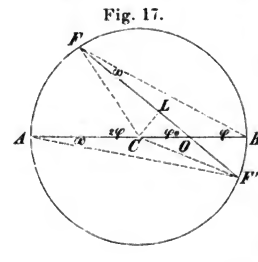
Zwölfter Abschnitt.

Die Landen'sche Transformation.

§ 45.

Wir knüpfen noch an die im Vorigen angestellte geometrische Betrachtung an und fassen den Grenzpunct O näher in's Auge, indem wir auch den Winkel einführen, welchen eine vom Grenzpuncte O nach einem beliebigen Puncte F der Peripherie des äusseren Kreises gerichtete Gerade mit dem durch den Grenzpunct gehenden Durchmesser bildet (Fig. 17).

Fig. 17.



Es sei wie früher $ACF = 2\varphi$, also $ABF = \varphi$. Wir bezeichnen nun mit φ_0 den eben erwähnten, neu einzuführenden Winkel, setzen also

$$AOF = \varphi_0.$$

Ist k der Modul, von welchem die Lage des Grenzpunctes O abhängt, und R der Radius des Kreises, so haben wir § 39 gefunden

$$CO = R\,\frac{1-k'}{1+k'},$$

und wenn man

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1-k'}{1+k'} = k_0$$

setzt,

$$CO = Rk_0.$$

Man kann nun sogleich eine Beziehung zwischen den Winkeln φ und φ_0 finden, nämlich im Dreieck COF hat man

$$CF : CO = \sin COF : \sin CFO,$$

das heisst

$$R : Rk_0 = \sin\varphi_0 : \sin(2\varphi - \varphi_0);$$

also ist

$$(2) \quad \ldots\ldots \sin(2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin\varphi_0.$$

Ferner können wir auch eine Differentialgleichung zwischen φ und φ_0 herstellen. Da nämlich der Grenzpunct die Stelle eines der kleinen Kreise im § 37 vertritt, so vertritt FO die Stelle einer Tangente FT an den kleinen Kreis. Bezeichnet man nun mit F' den Punct, in welchem die Gerade FO den äusseren Kreis zum zweiten Male schneidet, und setzt man den in derselben Richtung von CA aus gezählten Centriwinkel $ACF' = 2\varphi'$, so vertritt auch $F'O$ die Stelle der Tangente $F'T$. Wir haben aber § 37 die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{FT}{F'T}$$

gefunden. Setzt man also $FO = p$ und $F'O = p'$, so ist

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{p}{p'}.$$

Nun ist aber $BCF' = 2\varphi' - \pi$, folglich, $BAF' = BFF' = \omega$ gesetzt,

$$\omega = \varphi' - \frac{\pi}{2},$$

also auch

$$d\omega = d\varphi' \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{p'}{p},$$

und da $\varphi_0 = \omega + \varphi$, also $d\varphi_0 = d\omega + d\varphi$ ist,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\varphi_0}{d\varphi} = \frac{p+p'}{p}.$$

Nun ist nach § 37, weil FO die Stelle der Tangente FT, und AO die Stelle der Tangente At vertritt,

$$FO = p = AO \,.\, \Delta(\varphi, k),$$

oder

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad p = R\,(1 + k_0)\,\Delta\,(\varphi, k).$$

Zieht man ferner CL senkrecht auf FO, so ist

$$OL = \tfrac{1}{2}\,(p - p') = Rk_0 \cos\varphi_0,$$

also

$$p - p' = 2Rk_0 \cos\varphi_0.$$

Alsdann hat man

$$AO \,.\, BO = FO \,.\, F'O$$

oder

$$pp' = R\,(1 + k_0)\;R\,(1 - k_0) = R^2\,(1 - k_0^2).$$

Mithin erhält man auch

$$(5) \quad . \quad . \quad p + p' = \sqrt{4R^2 k_0^2 \cos^2 \varphi_0 + 4R^2 (1 - k_0^2)}$$
$$= 2R \sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \varphi_0}$$
$$= 2R\Delta (\varphi_0, k_0).$$

Setzt man daher die Werthe von p und $p + p'$ aus (4) und (5) in (3) hinein, so ergiebt sich

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1+k_0}{2} \cdot \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung zwischen φ und φ_0. Von dieser ist allerdings die Gleichung (2) eine Integralgleichung, aber keine vollständige, weil sie keine Constante mehr enthält, als die Differentialgleichung. Wir werden diese Gleichungen auch nicht unter diesem Gesichtspuncte betrachten, wir integriren vielmehr beide Seiten der Gleichung (6) und erhalten, da die Gleichung (2) ebenso wie auch Fig. 17 zeigt, dass φ und φ_0 gleichzeitig Null werden,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1+k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Hienach hat das elliptische Integral der ersten Gattung die bemerkenswerthe und folgenschwere Eigenschaft, dass es sich durch eine passende Substitution in ein anderes verwandeln lässt, welches genau dieselbe Form hat, in welchem aber der Modul einen anderen Werth besitzt; nämlich bestimmt man k_0 und φ_0 aus den Gleichungen

$$(7) \quad . \quad . \quad k_0 = \frac{1-k'}{1+k'} \quad \text{und} \quad \sin(2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin \varphi_0,$$

so ist

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1+k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)}.$$

Man nennt diesen Satz die Landen'sche Transformation nach dem Engländer John Landen, welcher seine Arbeiten hierüber in den *Philosophical Transactions* von den Jahren

1771 und 1775 (auch in den *Mathematical Memoirs* 1780. pag. 23.) niedergelegt hat.*)

§ 46.

Die Gleichung (7) ist sehr zweckmässig zur Berechnung des Winkels φ aus dem Winkel φ_0, nicht aber umgekehrt; wir suchen daher zunächst noch andere Relationen zwischen φ und φ_0 auf. Setzt man

$$2\varphi - \varphi_0 = \varphi - (\varphi_0 - \varphi); \quad \varphi_0 = \varphi + (\varphi_0 - \varphi),$$

so erhält man aus (7)

$$\sin\varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos\varphi \sin(\varphi_0 - \varphi) = k_0 \sin\varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) + k_0 \cos\varphi \sin(\varphi_0 - \varphi)$$

oder

$$tg\varphi - tg(\varphi_0 - \varphi) = k_0\, tg\varphi + k_0\, tg(\varphi_0 - \varphi),$$

also

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = \frac{1-k_0}{1+k_0} \operatorname{tg}\varphi,$$

oder da

$$\frac{1-k_0}{1+k_0} = k'$$

ist,

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi.$$

Diese Gleichung macht die Berechnung von φ_0 aus φ sehr leicht. Um auch φ_0 durch φ allein ausgedrückt zu erhalten, löse man die Tangente der Differenz in der vorigen Gleichung auf, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi} = k' \operatorname{tg}\varphi,$$

und daraus

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

---

*) Vgl. über die geometrische Ableitung der Landen'schen Transformation:

Jacobi. Extrait d'une lettre à M. Hermite. Crelle's Journ. Bd. 32.

Küpper. Démonstration géométrique etc. Crelle's Journ. Bd. 55.

Eine weitere Gleichung liefert die Betrachtung des Dreiecks FOB. In diesem ist (Fig. 17)

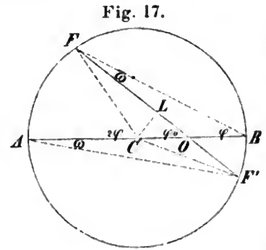


Fig. 17.

$$OB : FO = \sin(\varphi_0 - \varphi) : \sin\varphi$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$R(1 - k_0) : R(1 + k_0)\,\Delta(\varphi, k) = \sin(\varphi_0 - \varphi) : \sin\varphi,$$

woraus

$$\sin(\varphi_0 - \varphi) = \frac{(1-k_0)\sin\varphi}{(1+k_0)\,\Delta(\varphi,k)} = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi,k)}$$

folgt. Hieraus erhält man sodann

$$\sin\varphi_0\cos\varphi - \cos\varphi_0\sin\varphi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi,k)},$$

und wenn man darin den aus (10) folgenden Werth

$$\cos\varphi_0 = \frac{(1-k'\operatorname{tg}^2\varphi)\sin\varphi_0}{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}$$

substituirt,

$$\sin\varphi_0\cos\varphi - \frac{(1-k'\operatorname{tg}^2\varphi)\sin\varphi_0\cos\varphi}{1+k'} = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta(\varphi,k)}$$

oder

$$\sin\varphi_0\cos\varphi\,(1 + k' - 1 + k'\operatorname{tg}^2\varphi) = \frac{k'(1+k')\sin\varphi}{\Delta(\varphi,k)}$$

also

$$(11)\quad \ldots\ldots \quad \sin\varphi_0 = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi,k)}.$$

Der transformirte Modul k_0 ist bedeutend kleiner, als der ursprüngliche k. Um dies zu sehen, bringe man ihn auf folgende Form

$$(12)\quad \ldots \quad k_0 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2} = \frac{k^2}{(1+k')^2}.$$

Diese zeigt nämlich, dass k_0 nicht nur kleiner als k, sondern auch kleiner als k^2 ist. Dieselbe Form dient auch dazu, um k durch k_0 auszudrücken. Da nämlich

$$(13)\quad \ldots\ldots \quad 1 + k_0 = \frac{2}{1+k'}$$

wird, so erhält man

$$(14)\quad \ldots\ldots\ldots \quad k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}.$$

Dem in (8) vorkommenden Ausdruck $1 + k_0$ kann man noch andere Formen geben. Ausser der Relation (13) erhält man sofort noch aus (14)

$$1 + k_0 = \frac{2\sqrt{k_0}}{k}.$$

Führt man ferner noch das Complement des transformirten Moduls ein, indem man $k_0' = \sqrt{1 - k_0^2}$ setzt, so kann man schreiben

$$k_0' = \sqrt{(1 - k_0)(1 + k_0)} = (1 + k_0)\sqrt{\frac{1-k_0}{1+k_0}} = (1 + k_0)\sqrt{k'},$$

mithin

$$1 + k_0 = \frac{k_0'}{\sqrt{k'}};$$

da endlich

$$1 + k_0 = \frac{2}{1+k'}$$

ist, so erhält man auch

$$k'_0 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Stellen wir nun die in diesem Paragraphen gewonnenen Resultate zusammen, so ist

$$k_0 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}; \quad k_0' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad k' = \frac{1-k_0}{1+k_0}$$

$$1 + k_0 = \frac{2}{1+k'} = \frac{2\sqrt{k_0}}{k} = \frac{k_0'}{\sqrt{k'}}$$

$$\sin(2\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin\varphi_0$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

§ 47.

Wir haben gesehen, dass die Winkel φ und φ_0 mit einander verschwinden; es soll nun gezeigt werden, dass sie auch stets mit einander wachsen. Dazu differentiiren wir die Gleichung (10)

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}^2\varphi}$$

und erhalten

$$\frac{d\varphi_0}{d\varphi} = (1 + k') \frac{1 + k' \operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 - k' \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi},$$

mithin für das Differentialverhältniss $\frac{d\varphi_0}{d\varphi}$ einen Ausdruck, der immer positiv ist. Es wachsen also φ_0 und φ gleichzeitig. Nun wird jedesmal, wenn $\operatorname{tg}\varphi = o$ ist, auch $tg\varphi_0 = o$. Schreibt man ferner die obige Gleichung in der Form

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1 + k'}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} - k' \operatorname{tg}\varphi},$$

so zeigt sie, dass auch jedesmal wenn $tg\varphi = \infty$ ist, $tg\varphi_0 = o$ wird. Lässt man aber φ einen Quadranten, $tg\varphi$ also alle Werthe von o bis ∞ oder von $-\infty$ bis o durchlaufen, so wechselt wegen (10) $tg\varphi_0$ einmal sein Zeichen, nämlich dann, wenn $tg\varphi$ entweder den Werth $+\sqrt{\frac{1}{k'}}$ oder den Werth $-\sqrt{\frac{1}{k'}}$ überschreitet, folglich durchläuft gleichzeitig φ_0 zwei Quadranten, und den Werthen

$$o, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad 2\pi, \text{ etc. von } \varphi$$

entsprechen die Werthe

$$o, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi, \text{ etc. von } \varphi_0.$$

Hieraus folgt also, dass φ_0 doppelt so rasch wächst als φ, in der Art, dass jedesmal, wenn φ einem Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ gleich geworden ist, φ_0 demselben Vielfachen von π gleich ist.

Setzen wir nun in der Gleichung (8)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{1 + k_0}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi_0, k_0)}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\varphi_0 = \pi$. Bezeichnen wir daher das dem Modul k_0 zugehörige vollständige Integral mit K_0, setzen also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} = K_0 \quad \text{und daher} \quad \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} = 2K_0,$$

so erhalten wir die wichtige Relation

(15) . . . . $K = (1 + k_0)\, K_0.$

Die vorige Transformation kann man nun so oft, als man will, wiederholen. Bildet man nämlich eine Reihe von Moduln $k_0, k_{00}, k_{(3)} \ldots\ldots k_{(n)}$, und eine Reihe von Winkeln $\varphi_0, \varphi_{00}, \varphi_{(3)} \ldots\ldots \varphi_{(n)}$ nach den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}
k_0 = \dfrac{1-k'}{1+k'}, & \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi) = k' \operatorname{tg}\varphi \\
k_{00} = \dfrac{1-k'_0}{1+k'_0}, & \operatorname{tg}(\varphi_{00} - \varphi_0) = k'_0 \operatorname{tg}\varphi_0 \\
k_{(3)} = \dfrac{1-k'_{00}}{1+k'_{00}}, & \operatorname{tg}(\varphi_{(3)} - \varphi_{00}) = k'_{00} \operatorname{tg}\varphi_{00} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
k_{(n)} = \dfrac{1-k'_{(n-1)}}{1+k'_{(n-1)}}, & \operatorname{tg}(\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)}) = k'_{(n-1)} \operatorname{tg}\varphi_{(n-1)}
\end{array}\right\} \quad (16)$$

so hat man auch successive

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\Delta(\varphi_0, k_0)} = \frac{1+k_{00}}{2} \int_0^{\varphi_{00}} \frac{d\varphi_{00}}{\Delta(\varphi_{00}, k_{00})} \\
\displaystyle\int_0^{\varphi_{00}} \frac{d\varphi_{00}}{\Delta(\varphi_{00}, k_{00})} = \frac{1+k_{(3)}}{2} \int_0^{\varphi_{(3)}} \frac{d\varphi_{(3)}}{\Delta(\varphi_{(3)}, k_{(3)})} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\displaystyle\int_0^{\varphi_{(n-1)}} \frac{d\varphi_{(n-1)}}{\Delta(\varphi_{(n-1)}, k_{(n-1)})} = \frac{1+k_{(n)}}{2} \int_0^{\varphi_{(n)}} \frac{d\varphi_{(n)}}{\Delta(\varphi_{(n)}, k_{(n)})}
\end{array}\right\} \quad (17)$$

Je zwei auf einander folgende Moduln $k_{(n-1)}$ und $k_{(n)}$ stehen dann in derselben Beziehung, wie k und k_0, und ebenso auch je zwei auf einander folgende Winkel $\varphi_{(n-1)}$ und $\varphi_{(n)}$ in derselben Beziehung wie φ und φ_0. Es wächst daher auch $\varphi_{(n)}$ doppelt so rasch als $\varphi_{(n-1)}$, und setzt man $\varphi_{(n-1)} = \frac{\pi}{2}$, so wird $\varphi_{(n)} = \pi$. Bezeichnet man nun die den Moduln k_0, k_{00}, $k_{(3)} \ldots\ldots k_{(n)}$ entsprechenden vollständigen Integrale resp. mit $K_0, K_{00}, K_{(3)} \ldots\ldots K_{(n)}$, so erhält man auch successive die Relationen

$$\begin{aligned}
K &= (1 + k_0)\, K_0 \\
K_0 &= (1 + k_{00})\, K_{00} \\
K_{00} &= (1 + k_{(3)})\, K_{(3)} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
K_{(n-1)} &= (1 + k_{(n)})\, K_{(n)}
\end{aligned}$$

und wenn man alle diese Gleichungen multiplicirt,

$$(18)\quad K = (1 + k_0)\,(1 + k_{00})\,(1 + k_{(3)} \ldots\ldots)\,(1 + k_{(n)})\,K_{(n)}$$

Nun war nach (12)

$$k_0 = \frac{k^2}{(1 + k')^2},$$

also ist auch

$$k_{(n)} = \frac{k^2{}_{(n-1)}}{(1 + k'_{(n-1)})^2}.$$

Die Moduln k, k_0, k_{00}, u. s. w. bilden also eine abnehmende Reihe. Je kleiner aber $k_{(n-1)}$ ist, desto mehr nähert sich sein Complement $k'_{(n-1)}$ der Grenze 1, und folglich $1 + k'_{(n-1)}$ der Grenze 2. Je grösser also n ist, oder je weiter man in der Reihe der Moduln fortschreitet, desto mehr nähert sich $k_{(n)}$ dem Werhe $(\frac{1}{2}\,k_{(n-1)})^2$. Hieraus geht hervor, dass $k_{(n)}$ mit wachsendem n rasch zur Grenze o convergirt, und dass

$$\lim k_{(n)} = o, \quad \lim k'_{(n)} = 1 \quad (\text{für } n = \infty)$$

und daher

$$\lim K_{(n)} = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Geht man also in der Gleichung (18) zur Grenze über, so erhält man K ausgedrückt durch das rasch convergirende unendliche Product

$$(19)\quad \ldots\; K = \frac{\pi}{2}\,(1 + k_0)\,(1 + k_{00})\,(1 + k_{(3)}) \ldots\ldots$$

Diese Gleichung eignet sich nun ganz vortrefflich zur Berechnung von K aus einem gegebenen Modul k. Denn setzt man $k = \sin\theta$, so wird, wie wir schon § 39 sahen, $k_0 = tg^2\frac{1}{2}\,\theta$, folglich $1 + k_0 = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\,\theta}$. Setzt man nun successive

$$k_0 = \mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}\,\theta = \sin\theta_0,\; k_{00} = tg^2\,\tfrac{1}{2}\,\theta_0 = \sin\theta_{00}, \text{ u. s. w.,}$$

so wird

$$1 + k_0 = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta},\; 1 + k_{00} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta_0},\; 1 + k_{(3)} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta_{00}}, \text{etc.}$$

und daher

$$K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos^2\frac{1}{2}\theta\,\cos^2\frac{1}{2}\theta_0\,\cos^2\frac{1}{2}\theta_{00}\ldots\ldots}.$$

Ist z. B. $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $\theta = 45^0$, so steht die Rechnung so:

$\theta = 45^0 0' 0'',00$	$\theta_0 = 9^0 52' 45'',41$	$\theta_{00} = 0^0 25' 40'',74$
$\frac{1}{2}\theta = 22\ 30\ 0,00$	$\frac{1}{2}\theta_0 = 4\ 56\ 22,\ 70$	$\frac{1}{2}\theta_{00} = 0\ 12\ 50\ 37$
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta$ .. 9,6172243.0	$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta_0$ .. 8,9366504. 5	$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta_{00}$ .. 7,5722761.7
$\cos\frac{1}{2}\theta$ .. 9,9656153.0	$\cos\frac{1}{2}\theta_0$ .. 9,9983840.1	$\cos\frac{1}{2}\theta_{00}$ .. 9,9999970.0
$\left.\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\\ \sin\theta_0\end{matrix}\right\}$ .. 9,2344486.0	$\left.\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta_0\\ \sin\theta_{00}\end{matrix}\right\}$ .. 7,8733009.0	$\left.\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta_{00}\\ \sin\theta_{(3)}\end{matrix}\right\}$ 5,1445523.4

$\theta_{(3)} = 0^0\ 0'\ 3''$, $\qquad \cos\frac{1}{2}\theta_{(3)}$ .. 0,0000000.

Es wird also schon $\cos\frac{1}{2}\theta_{(3)}$ bei 7 Decimalstellen der Einheit gleich. Ferner ergiebt sich:

$$
\begin{array}{ll}
\cos^2\frac{1}{2}\theta \ldots\ldots & 9,9312306.0 \\
\cos^2\frac{1}{2}\theta_0 \ldots & 9,9967680.2 \\
\cos^2\frac{1}{2}\theta_{00} \ldots & 9,9999940.0 \\
\hline
\frac{\pi}{2K} \ldots\ldots\ldots & 9,9279926.2 \\
\frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots & 0,1961198.7 \\
\hline
K \ldots\ldots\ldots & 0,2681272.5
\end{array}
$$

$$K = 1,8540747.$$

Man sieht aus diesem Beispiele, dass man meistens nur wenige Factoren des unendlichen Products (19) zu berechnen braucht, indem man nur drei derselben bedarf, wenn K den Mittelwerth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ hat.

In derselben Weise kann man nun auch ein beliebiges elliptisches Integral berechnen. Mit Anwendung der Legendre'schen Bezeichnung hat man nämlich aus (17)

$$
\begin{aligned}
F(\varphi, k) &= \frac{1+k_0}{2} F(\varphi_0, k_0) \\
F(\varphi_0, k_0) &= \frac{1+k_{00}}{2} F(\varphi_{00}, k_{00}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F(\varphi_{(n-1)}, k_{(n-1)}) &= \frac{1+k_{(n)}}{2} F(\varphi_{(n)}, k_{(n)})
\end{aligned}
$$

und erhält daher durch Multiplication aller dieser Gleichungen

$$F(\varphi, k) = \frac{(1+k_0)(1+k_{00})\ldots\ldots(1+k_{(n)})}{2^n} F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}).$$

Geht man aber nun zur Grenze für $n = \infty$ über, so ist, weil $\lim k_{(n)} = o$ ist,

$$\lim F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}) = \lim \varphi_{(n)}.$$

Setzt man ausserdem für das unendliche Product

$$(1 + k_0)(1 + k_{00}) \ldots\ldots$$

seinen aus (19) folgenden Werth $\frac{2K}{\pi}$, so erhält man

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \lim \frac{\varphi_{(n)}}{2^n}.$$

Zur successiven Berechnung der Winkel $\varphi_0, \varphi_{00} \ldots\ldots \varphi_{(n)}$ dienen die Gleichungen (16). Dieselben zeigen zugleich, dass, wenn man diese Berechnung so weit fortgesetzt hat, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k'_{(n-1)}$ von 1 nicht mehr verschieden ist, $\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)} = \varphi_{(n-1)}$, also $\varphi_{(n)} = 2\,\varphi_{(n-1)}$ wird. Folglich ist dann auch

$$\frac{\varphi_{(n)}}{2^n} = \frac{2\varphi_{(n-1)}}{2^n} = \frac{\varphi_{(n-1)}}{2^{n-1}}; \quad \frac{\varphi_{(n+1)}}{2^{n+1}} = \frac{2\varphi_{(n)}}{2^{n+1}} = \frac{\varphi_{(n)}}{2^n} = \frac{\varphi_{(n-1)}}{2^{n-1}},$$

u. s. f. Demnach behält von da ab das Verhältniss $\frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$ stets denselben Werth, wie gross man auch n nehmen mag, so dass dieses Verhältniss sich wirklich einem Grenzwerthe nähert, den es erreicht, wenn $k'_{(n)} = 1$ geworden ist.

Um auch die Berechnung von $F(\varphi, k)$ an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir dem Modul k wieder denselben Werth $\sqrt{\frac{1}{2}}$ wie vorhin geben und $\varphi = 30^0$ annehmen. Dann ergiebt sich aus den früheren Zahlen zunächst

$$\frac{2K}{\pi} \ldots 0{,}0720073.8,$$

ferner

$$k' = \cos\theta \ldots 9{,}8494850.0$$
$$k'_0 = \cos\theta_0 \ldots 9{,}9935118.0$$
$$k'_{00} = \cos\theta_{00} \ldots 9{,}9999878.9$$
$$k'_{(3)} = \cos\theta_{(3)} \ldots 0{,}0000000.0$$

sodass für $n = 3$ die Grenze erreicht ist. Die Berechnung der Winkel φ_0, φ_{00}, u. s. w. nach den Gleichungen (16) steht nun so:

$\varphi = 30^0$	$\varphi_0 = 52^0\, 12'\, 27'',56$	$\varphi_{00} = 104^0\, 0'\, 0'',14$
$\mathrm{tg}\,\varphi \ldots 9{,}7614394.0$	$\mathrm{tg}\,\varphi_0 \ldots 0{,}1104374.9$	$\mathrm{tg}\,\varphi_{00} \ldots 0{,}6032276.5_n$
$k' \ldots 9{,}8491850.0$	$k'_0 \ldots 9{,}9935118.0$	$k'_{00} \ldots 9{,}9999878.9$
$\mathrm{tg}(\varphi_0 - \varphi) \ldots 9{,}6109244.0$	$\mathrm{tg}(\varphi_{00} - \varphi_0)\ 0{,}1039492.9$	$\mathrm{tg}(\varphi_{(3)} - \varphi_{00})\, 0{,}6032155.4_n$
$\varphi_0 - \varphi = 22^0\, 12'\, 27'',56$	$\varphi_{00} - \varphi_0 = 51^0\, 47'\, 32'',58$	$\varphi_{(3)} - \varphi_{00} = 104^0\, 0'\, 1'',40$
$\varphi_0 = 52^0\, 12'\, 27'',56$	$\varphi_{00} = 104\ \ 0\ \ 0\ ,14$	$\varphi_{(3)} = 208\ \ 0\ \ 1\ ,54.$

Da nun $k'_{(3)} = 1$ ist, so wird schon $\varphi_{(4)} = 2\varphi_{(3)}$, und folglich ist der gesuchte Grenzwerth $\frac{\varphi_{(3)}}{2^3} = \frac{1}{8}\,(208^0\,0'\,1'',54) = 26^0\,0'\,0'',19$ $= 93600'',19$.

Diesen Winkel muss man zunächst in Längenmass ausdrücken, indem man ihn mit der Zahl 206264,8 dividirt, deren Logarithme 5,3144251.3 ist. Dann ist

$$
\begin{array}{rr}
93600'',19 \;\ldots\ldots & 4{,}9712767.0 \\
206264{,}8 \;\ldots\ldots & \underline{5{,}3144251.3} \\
 & 9{,}6568515.7 \\
\frac{2K}{\pi} \;\ldots\ldots & \underline{0{,}0720073.8} \\
F(\varphi, k) \;\ldots & 9{,}7288589.5
\end{array}
$$

$$F(\varphi, k) = 0{,}5356221, \text{ für } \varphi = 30^0 \text{ und } k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Die vorige Betrachtung führt auch zu einer Methode, um aus einem gegebenen Argument u und einem gegebenen Modul k den Werth von $am\,(u, k)$ zu berechnen. Setzt man nämlich $F(\varphi, k) = u$, so ist $\varphi = am\,(u, k)$. Man berechne daher zuerst aus k den zugehörigen Werth von K und die Reihe der Moduln k_0, $k_{00}, \ldots\, k_{(n)}$, so wie die ihrer Complemente, $k'_0, k'_{00}, \ldots\, k'_{(n)}$. Dann findet man zugleich die Zahl n, für welche innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k'_{(n)} = 1$ ist. Für diesen Werth von n und zugleich auch für jeden grösseren hat man die Gleichung

$$F(\varphi, k) = u = \frac{2K}{\pi}\,\frac{\varphi_{(n)}}{2^n},$$

aus welcher sich

$$\varphi_{(n)} = 2^n\,\frac{\pi u}{2K}$$

ergiebt. Alsdann berechne man successive die Winkel $\varphi_{(n-1)}$, $\varphi_{(n-2)} \ldots\, \varphi_{00}, \varphi_0, \varphi$ aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\sin\,(2\,\varphi_{(n-1)} - \varphi_{(n)}) = k_{(n)} \sin \varphi_{(n)} \\
&\sin\,(2\,\varphi_{(n-2)} - \varphi_{(n-1)}) = k_{(n-1)} \sin \varphi_{(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sin\,(2\varphi_0 - \varphi_{00}) = k_{00} \sin \varphi_{00} \\
&\sin\,(2\,\varphi - \varphi_0) = k_0 \sin \varphi_0,
\end{aligned}
$$

welche durch fortgesetzte Transformation aus der Gleichung (7) entstehen, und gelangt so zuletzt zu φ, welches der gesuchte Werth von $am\,(u, k)$ ist.

Diese Vorschrift gilt zunächst nur für den Fall, dass u kleiner als K ist. Im entgegengesetzten Falle kommt man aber ebenso leicht an's Ziel, denn da nach § 7 die Gleichungen

$$am\,(2hK \pm v) = h\pi \pm am\, v$$

bestehen, so setze man

$$u = 2hK + v \quad \text{oder} \quad u = 2hK - v,$$

je nachdem das grösste in u enthaltene Vielfache von K ein gerades, $2hK$, oder ein ungerades, $(2h - 1)\,K$, ist. In beiden Fällen ist dann $v < K$, und man kann nach der vorigen Methode $am\, v$ berechnen. Sodann erhält man im ersten Falle

$$am\, u = h\pi + am\, v$$

und im zweiten

$$am\, u = h\pi - am\, v.\text{*)}$$

§ 48.

Die im § 46 gefundenen Relationen

$$k_0 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}};\quad k' = \frac{1-k_0}{1+k_0} = \frac{1-\sqrt{1-k_0'^2}}{1+\sqrt{1-k_0'^2}}$$

$$k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0} \qquad\qquad k'_0 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

zeigen, dass k_0 zu k in derselben Beziehung steht, wie k' zu k'_0. Bezeichnet man nun mit λ_0, λ', λ'_0 solche Werthe, die aus einem

---

*) Die successive Transformation der elliptischen Integrale rührt von Lagrange her, der sie in der Abhandlung: „Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré. Mémoires de l'academie à Turin. 1784. 1785. Tom. II." aufstellte. Die späteren Ausführungen Legendre's finden sich in den Exercices von pag. 81 an und im Traité. Chap. XVII und XIX. Unter den im 3ten Bande der Exercices und im zweiten des Traité gegebenen Tafeln mögen folgende namhaft gemacht werden:

Tafel I enthält die Werthe von Log K und Log E.

- II - - - - $F(\varphi, \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ und $E_1\,(\varphi, \sqrt{\tfrac{1}{2}})$.
- III - - Logarithmen von k_0, k_{00}, etc. für ein gegebenes k, und von k'_0, k'_{00}, etc. für ein gegebenes k'.
- VIII enthält 1) die Werthe von $F\,(45^0, k)$ und $E_1\,(45^0, k)$, 2) die Werthe von K und E.
- IX enthält mit doppeltem Eingange die Werthe von $F\,(\varphi, k)$ und $E_1\,(\varphi, k)$.

Modul λ ebenso entstehen wie respective k_0, k', k'_0 aus k, und setzt dann

(20) . $k'_0 = \lambda$, so ist $k_0 = \lambda'$, $k' = \lambda_0$, $k = \lambda'_0$,

denn es ist

$$k_0 = \sqrt{1-k'^2_0} = \sqrt{1-\lambda^2} = \lambda'; \quad k' = \frac{1-k_0}{1+k_0} = \frac{1-\lambda'}{1+\lambda'} = \lambda_0$$

$$k = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0} = \frac{2\sqrt{\lambda'}}{1+\lambda'} = \lambda'_0.$$

Stellt man daher die Reihen der Moduln und ihrer Complemente auf:

$$(21) \quad . \quad . \quad \begin{cases} k, & k_0, & k_{00}, & \ldots\ldots & k_{(n)} & \ldots\ldots & \text{Grenze } o \\ k', & k'_0, & k'_{00}, & \ldots\ldots & k'_{(n)} & \ldots\ldots & \text{Grenze } 1, \end{cases}$$

so nimmt die letztere in der Weise zu, dass jedes Glied aus seinem vorhergehenden auf dieselbe Weise entsteht, wie in der ersteren Reihe jedes Glied aus seinem folgenden.

Setzt man nun in der Gleichung (8) für den Augenblick λ statt k, sodass dieselbe heisst

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi,\lambda)} = \frac{1+\lambda_0}{2}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\varDelta(\varphi_0,\lambda_0)},$$

und setzt in derselben

$$\lambda = k'_0,$$

also auch nach (20) $\lambda_0 = k'$, so erhält man

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi,k'_0)} = \frac{1+k'}{2}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\varDelta(\varphi,k')},$$

oder weil

$$\frac{1+k'}{2} = \frac{1}{1+k_0}$$

ist,

$$(1+k_0)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi,k'_0)} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{\varDelta(\varphi_0,k')}.$$

Bezeichnet man nun die den Modulen k', k'_0, k'_{00}, u. s. w. zugehörigen vollständigen Integrale respective mit K', K'_0, K'_{00}, u. s. w., so ist, weil für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \pi$ wird,

$$(1+k_0)\,K'_0 = 2K',$$

und da jede zwei auf einander folgende Moduln in der nämlichen Beziehung stehen, auch

$$(1 + k_{00})\, K'_{00} = 2K'_0$$
$$(1 + k_{(3)})\, K'_{(3)} = 2K'_{00}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(1 + k_{(n)})\, K'_{(n)} = 2K'_{(n-1)}$$

Die Multiplication aller dieser Gleichungen liefert

$$(1 + k_0)\,(1 + k_{00}) \ldots. (1 + k_{(n)})\, K'_{(n)} = 2^n K'.$$

Lässt man dann n unendlich gross werden, so ist zwar, weil $\lim k'_{(n)} = 1$ ist, $\lim K'_{(n)} = \infty$,*) aber für den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{K'_{(n)}}{2^n}$ ergiebt sich

$$\lim \frac{K'_{(n)}}{2^n} = \frac{K'}{(1+k_0)\,(1+k_{00}) \ldots.}$$
$$= \frac{\pi K'}{2K}.$$

§ 49.

Die beiden Reihen von Moduln (21) können nun auch nach der entgegengesetzten Seite fortgesetzt werden; bildet man nämlich die Moduln $k_1, k_2, k_3 \ldots.; k'_1, k'_2, k'_3 \ldots.$ mittelst der Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\quad k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \ldots.$$
$$k'_1 = \frac{1-k}{1+k},\quad k'_2 = \frac{1-k_1}{1+k_1},\quad k'_3 = \frac{1-k_2}{1+k_2}, \ldots..$$

so erhält man die beiden Reihen

$$k_n, \ldots. k_3, k_2, k_1, k, k_0, k_{00}, k_{(3)}, \ldots. k_{(n)},$$
$$k'_n, \ldots. k'_3, k_2, k'_1, k', k'_0, k'_{00}, k'_{(3)} \ldots. k'_{(n)},$$

in welchen jede zwei aufeinander folgende Glieder in der nämlichen Beziehung stehen, und zwar jede zwei aufeinander folgende der unteren Reihe in der umgekehrten Beziehung, wie irgend zwei aufeinander folgende der oberen Reihe. Zwischen den vier Grössen k, k_1, k', k'_1 bestehen daher auch die Gleichungen

---

*) Siehe S. 17.

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1}, \quad k'_1 = \frac{1-k}{1+k}, \\ & \qquad 1 + k = \frac{2}{1+k'_1} = \frac{2\sqrt{k}}{k_1} = \frac{k'}{\sqrt{k'_1}}, \\ & k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k' = \frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1}, \\ & \qquad 1 + k'_1 = \frac{2}{1+k} = \frac{k_1}{\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k'_1}}{k'}. \end{aligned} \right.$$

Da nun also $k, k_1, k_2 \ldots k_n$ in derselben Weise fortschreiten, wie $k', k'_0, k'_{00} \ldots k'_{(n)}$, und

$$k', k'_1, k'_2, \ldots k'_n$$

ebenso wie

$$k, k_0, k_{00}, \ldots k_{(n)},$$

so folgt, dass auch

$$\lim k_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim k'_n = 0$$

sein wird, wenn man n unendlich gross werden lässt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Reihe der Winkel $\varphi, \varphi_0, \varphi_{00}, \ldots$ nach der entgegengesetzten Seite fortsetzen, indem man die Glieder folgender Reihe

$$\varphi_n, \ldots \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1, \varphi, \varphi_0, \varphi_{00} \ldots \varphi_{(n)}$$

mittelst der Gleichungen

$$(23)\left\{ \begin{array}{ll} \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi, & \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tg}\varphi_1, \\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1, & \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = k'_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array} \right.$$

bildet. Da nun die Moduln $k'_1, k'_2, \ldots$ zur Null convergiren, so wird in der Grenze $\varphi_n = \varphi_{n-1}$, während also die Winkel φ_0, φ_{00}, etc. in der Weise zunehmen, dass $\varphi_{(n)}$ immer mehr $= 2\varphi_{(n-1)}$ zu werden strebt, nehmen die Winkel φ_1, φ_2, etc. so ab, dass φ_n immer mehr $= \varphi_{n-1}$ zu werden strebt. Ausserdem aber besteht zwischen φ_1 und φ, und ebenso auch bei allen folgenden Paaren, die nämliche Beziehung, wie zwischen φ und φ_0, sodass auch, wenn $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, $\varphi = \pi$ wird. Endlich hat man auch zwischen den Integralen die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung

$$(24) \quad \ldots \quad \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)} = \frac{1+k}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

Setzt man nun zuerst, wie im vorigen §, k'_1 an die Stelle von k, so tritt k' an die Stelle von k_1, folglich hat man auch

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k')} = \frac{1+k_1'}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k'_1)}.$$

Bezeichnet man dann die den Moduln $k_1, k_2, \ldots . k_n$; $k'_1, k'_2, \ldots . k'_n$ zugehörigen Werthe von K mit $K_1, K_2, \ldots . K_n$; $K'_1, K'_2, \ldots . K'_n$, so erhält man, wenn man $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi = \pi$ setzt,

$$K' = (1 + k'_1)\, K'_1,$$

und dann ebenso

$$K'_1 = (1 + k'_2)\, K'_2,\ K'_2 = (1 + k'_3)\, K'_3, \ldots .$$
$$K'_{n-1} = (1 + k'_n)\, K'_n,$$

folglich

$$K' = (1 + k'_1)(1 + k'_2) \ldots . (1 + k'_n)\, K'_n.$$

Nun ist

$$\lim k'_n = o, \quad \lim K'_n = \frac{\pi}{2},$$

also

$$(25) \quad . \quad \lim (1 + k'_1)(1 + k'_2) \ldots . (1 + k'_n) = \frac{2K'}{\pi}.$$

Aus (24) folgt ferner, weil

$$\frac{1+k}{2} = \frac{1}{1+k'_1}$$

ist,

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad (1 + k'_1)\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

Mithin ist auch

$(1 + k'_1)\, K_1 = 2K$; $(1 + k'_2)\, K_2 = 2K_1$; $\ldots .$ $(1 + k'_n)\, K_n = 2K_{n-1}$

und

$$(27) \quad . \quad (1 + k'_1)(1 + k'_2) \ldots . (1 + k'_n)\, K_n = 2^n K.$$

Nun ist

$$\lim k_n = 1, \quad \lim K_n = \infty;$$

dagegen

$$(28) \quad . \quad . \quad \lim \frac{K_n}{2^n} = \frac{K}{(1+k'_1)(1+k'_2) \ldots . .} = \frac{\pi K}{2K'}.$$

Endlich kann man die Gleichung (26) noch benutzen, um durch fortgesetztes Vergrössern des Moduls das elliptische Integral zu berechnen. Da nämlich dann der Modul in der Grenze

gleich 1 wird, so hört auch dann das elliptische Integral auf, ein solches zu sein, vielmehr wird für $k = 1$, $\Delta\varphi = \cos\varphi$, mithin

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Schreibt man nun die Gleichung (26) in der Legendre'schen Bezeichnung und setzt die Transformation fort, so erhält man

$$F(\varphi, k) = (1 + k'_1)\, F(\varphi_1, k_1)$$
$$F(\varphi_1, k_1) = (1 + k'_2)\, F(\varphi_2, k_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(\varphi_{n-1}, k_{n-1}) = (1 + k'_n)\, F(\varphi_n, k_n),$$

und daraus durch Multiplication

$$F(\varphi, k) = (1 + k'_1)(1 + k'_2)\ldots\ldots(1 + k'_n)\, F(\varphi_n, k_n).$$

Hat man nun die Transformation so weit fortgesetzt, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze $k_n = 1$ geworden ist, so ist

$$F(\varphi_n, k_n) = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_n),$$

und daher mit Berücksichtigung von (25)

$$(29) \quad \ldots \quad F(\varphi, k) = \frac{2K'}{\pi}\log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_n).$$

Die successive Berechnung des Winkels φ_n geschieht mittelst der Gleichungen

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi$$
$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1, \text{ etc.}$$

Um endlich auch die Moduln k_1, k_2, etc. leicht aus k finden zu können, setze man $k = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\eta$, dann wird, weil

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

ist,

$$k_1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\eta} = \sin\eta;$$

man setze dann aufs neue $k_1 = \sin\eta = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\eta_1$, dann wird $k_2 = \sin\eta_1$, u. s. w.

Diese Methode ist besonders dann anwendbar, wenn der gegebene Modul k von 1 wenig verschieden ist, in welchem Falle die frühere Methode eine weitläufigere Rechnung erfordern würde. Um hiefür ein Beispiel zu geben, sei $k = \sin 89^0 \ldots\ldots 9{,}9999338$ und $\varphi = 30^0$. Dann zeigt ein leichter Ueberschlag, dass bis

auf 7 Decimalstellen schon $k_1 = 1$ ist. Die Berechnung von φ_1 steht nun so:

$$\begin{aligned} \sin\varphi & \ldots 9{,}6989700 \\ k & \ldots 9{,}9999338 \\ \sin(2\varphi_1 - \varphi) & \ldots 9{,}6989038 \\ 2\varphi_1 - \varphi & = 29^0\, 59'\, 41'',84 \\ 2\varphi_1 & = 59\;\; 59\;\; 41\;,84 \\ \tfrac{1}{2}\varphi_1 & = 14\;\; 59\;\; 55\;,46 \\ 45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1 & = 59\;\; 59\;\; 55\;,46 \end{aligned}$$

In der Gleichung (29) kommt nun der natürliche Logarithmus von $\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)$ vor; um daher den Briggischen Logarithmus einzuführen, muss man mit dem Modul M des Briggischen Logarithmensystems dividiren. Es ist aber

$$M = 0{,}434294481 \;\ldots\; 9{,}6377842.8$$

und dann

$$F(\varphi, k) = \frac{2K'}{\pi}\,\frac{\text{Brigg. Log. tg}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_n)}{M}.$$

Die Berechnung von K' ist in diesem Falle sehr leicht. Denn da $k' = \cos 89^0 = \sin 1^0 = \sin\theta$ ist, so wird schon $\cos\frac{1}{2}\theta_0 = 1$ und daher

$$\frac{2K'}{\pi} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\cos^2 30'}$$

$$\frac{2K'}{\pi} \;\ldots\; 0{,}0000330.$$

Hiemit steht die fernere Rechnung so:

$$\begin{aligned} \text{Brigg. Log. tg}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) & = 0{,}2385385.4 \\ \text{Brigg. Log. tg}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) & \ldots 9{,}3775585.4 \\ \text{Compl. } M & \ldots 0{,}3622157.2 \\ \frac{2K'}{\pi} & \ldots 0{,}0000330.0 \\ \hline F(\varphi, k) & \ldots 9{,}7398072.6 \end{aligned}$$

Mithin

$$F(\varphi, k) = 0{,}5492970, \text{ für } \varphi = 30^0 \text{ und } k = \sin 89^0.$$

§ 50.

Legendre*) hat auch einen Näherungswerth für K finden gelehrt, wenn k sehr nahe an 1, K also eine sehr grosse Zahl

---

*) Legendre. Exercices I. § 72 ff. Traité I. Chap. XIX.

ist. Da nämlich k_n und $k'_{(n)}$ zur 1 convergiren, so kann man sich die Aufgabe stellen, K_n oder $K'_{(n)}$ für grosse Werthe von n zu bestimmen. Dabei ist nun zu bemerken, dass, wenn n so gross ist, dass man innerhalb einer angenommenen Näherungsgrenze k_n oder $k'_{(n)}$ der Eins gleichsetzen kann, darum k'_n und $k_{(n)}$ noch nicht verschwindend klein anzunehmen sind; denn diese Werthe verhalten sich wie Sinus und Cosinus; ist der Sinus aber eine kleine Grösse der ersten Ordnung, so ist der zugehörige Cosinus um eine kleine Grösse der zweiten Ordnung von Eins verschieden. Wir können also annehmen, dass zwar k_n gleich 1 gesetzt, k'_n aber nicht vernachlässigt werden darf. Alsdann ist

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\Delta(\varphi_n, k_n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\cos\varphi_n}$$

Da aber wegen der Gleichung (24)

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\Delta(\varphi_n, k_n)} = \frac{2}{1+k_n}\int_0^{\varphi_{n+1}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\Delta(\varphi_{n+1}, k_{n+1})}$$

ist, so erhält man auch

$$K_n = \frac{2}{1+k_n}\int_0^{\varphi_{n+1}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\cos\varphi_{n+1}},$$

worin noch der Werth von φ_{n+1} für $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen ist.

Nun ist aber wegen (23)

$$\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) = k'_{n+1} \operatorname{tg}\varphi_{n+1}.$$

Setzt man darin $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$, so wird $\operatorname{tg}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_{n+1}}$, folglich

$$\operatorname{tg}\varphi_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}},$$

mithin erhält man

$$K_n = \frac{2}{1+k_n}\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}} \frac{d\varphi_{n+1}}{\cos\varphi_{n+1}} = \frac{1}{1+k_n}\log\frac{1+\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}}{1-\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}}},$$

oder da $\sin\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{k'_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}$ ist,

$$K_n = \frac{1}{1+k_n} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}}} = \frac{1}{1+k_n} \log \frac{\sqrt{1+k'_{n+1}}+1}{\sqrt{1+k'_{n+1}}-1}$$

$$= \frac{1}{1+k_n} \log \frac{1+1+k'_{n+1}+2\sqrt{1+k'_{n+1}}}{k'_{n+1}}.$$

Nun war schon angenommen, dass $k_n = 1$ sei. Aus den Formeln (22) folgt aber

$$1 + k'_{n+1} = \frac{2}{1+k_n} = 1.$$

Der Zähler des vorigen Ausdruckes ist also gleich 4 zu setzen, und dann ist

$$K_n = \tfrac{1}{2} \log \frac{4}{k'_{n+1}} = \log \frac{2}{\sqrt{k'_{n+1}}}.$$

Ferner ist (22)

$$1 + k_n = \frac{k'_n}{\sqrt{k'_{n+1}}}, \quad \text{also} \quad \sqrt{k'_{n+1}} = \frac{k'_n}{1+k_n} = \frac{k'_n}{2},$$

mithin

$$K_n = \log \frac{4}{k'_n}.$$

Demnach ist nun auch

$$K'_{(n)} = \log \frac{4}{k_{(n)}},$$

oder etwas anders ausgesprochen: Ist k so klein, dass innerhalb der angenommenen Näherungsgrenze k' nicht mehr von 1 verschieden ist, so ist mit derselben Annäherung

$$K' = \log \frac{4}{k}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, wie man dies auch zur Berechnung von K für grössere Werthe von k benutzen kann. Denn nimmt man n so gross an, dass $k_n = 1$ zu setzen ist, so erhält man aus (27) mit Benutzung des eben gefundenen Werthes von K_n

$$K = \frac{(1+k'_1)(1+k'_2)\ldots\ldots(1+k'_n)\log\frac{4}{k'_n}}{2^n},$$

oder weil dann $1 + k'_{n+1} = 1$, also mit derselben Annäherung auch

$$(1+k'_1)(1+k'_2)\ldots\ldots(1+k'_n) = \frac{2K'}{\pi},$$

$$(30) \quad \ldots K = \frac{2K'}{\pi} \frac{\log\frac{4}{k'_n}}{2^n} = \frac{2K'}{\pi} \frac{\text{Brigg. Log.}\,\frac{4}{k'_n}}{M\,2^n},$$

wo M wie vorhin den Modulus des Briggischen Logarithmensystems bedeutet.

Nehmen wir z. B. für k denselben Werth wie im vorigen §, nämlich

$$k = \sin 89^0,$$

so ist, wie dort erwähnt, $k_1 = 1$, also $n = 1$. Setzt man aber $k' = \sin\theta$, so wird $k'_1 = \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}\theta$, also hier $k'_1 = \mathrm{tg}^2 (0^0\ 30')$. Man hat nun

$$\begin{array}{rl} \mathrm{tg}\,(0^0\ 30') & \ldots\ 7{,}9408584.0 \\ k'_1 & \ldots\ 5{,}8817168.0 \\ 4 & \ldots\ 0{,}6020599.9 \\ \hline \text{Brigg. Log. } \frac{4}{k'_1} & =\ 4{,}7203431.9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Brigg. Log. } \frac{4}{k'_1} & \ldots\ 0{,}6739735.7 \\ \frac{2K'}{\pi} & \ldots\ 0{,}0000330.0 \\ \text{Compl. } M & \ldots\ 0{,}3622157.2 \\ \text{Compl. } 2 & \ldots\ 9{,}6989700.0 \\ \hline K & \ldots\ldots\ 0{,}7351922.9 \end{array}$$

also

$$K = 5{,}4349087.$$

Vertauscht man in der vorigen Formel k mit k', so erhält man auch eine Formel, die zur Berechnung von K' für kleine Werthe von k dienlich ist, nämlich

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad K' = \frac{2K}{\pi} \frac{\text{Brigg. Log. } \frac{4}{k_{(n)}}}{M\, 2^n{}_1},$$

in welcher nun n so gross anzunehmen ist, dass $k'_{(n)} = 1$ gesetzt werden kann.

Dreizehnter Abschnitt.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen.

§ 51.

Wir haben gesehen, dass zwei aufeinanderfolgende Winkel φ und φ_0 unter andern auch durch die Gleichung (11) § 46 verbunden sind

$$\sin \varphi_0 = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}.$$

Führen wir darin statt der Winkel φ_0 und φ, die Winkel φ und φ_1 und also auch die zugehörigen Moduln k_1 und k'_1 ein (siehe § 49), so ist auch

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\varphi = \frac{(1+k'_1)\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)},$$

welche Gleichung sich auch durch Umformung der Gleichungen

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi, \quad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tg}\varphi_1$$

ergiebt. Es war ferner (26 § 49

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1, k_1)} = \frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}$$

und

$$1 + k = \frac{2}{1+k'_1} = \frac{K_1}{K},$$

mithin

$$F(\varphi_1, k_1) = \frac{K_1}{2K} F(\varphi, k).$$

Setzt man nun

$$F(\varphi, k) = u, \quad F(\varphi_1, k_1) = u_1,$$

so wird

$$u_1 = \frac{K_1}{2K} u.$$

Ferner

$$\varphi = am(u, k), \quad \varphi_1 = am(u_1, k_1) = am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right).$$

Setzt man diese Werthe in (1) hinein, so erhält man

$$\sin am(u, k) = (1 + k'_1)\frac{\sin am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)\cos am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)}{\Delta\, am\left(\frac{K_1}{2K} u, k_1\right)}.$$

Da aber allgemein

$$\frac{\cos am\,(v,\,k_1)}{\varDelta\; am\,(v,\,k_1)} = \sin am\,(u + K_1,\,k_1)$$

ist, so hat man auch

$$\frac{\cos am\,(\frac{K_1}{2K}\,u,\,k_1)}{\varDelta\, am\,(\frac{K_1}{2K}\,u,\,k_1)} = \sin am\,(\frac{K_1}{2K}\,u + K_1,k_1) = \sin am\,(\frac{K_1}{2K}(u+2K),k_1)$$

und folglich

$$(2)\quad \sin am\,(u,k) = (1+k'_1)\sin am\,\frac{K_1 u}{2K}\sin am\,(\frac{K_1}{2K}(u+2K)).\quad (\text{Mod. } k_1)$$

Diese Formel lehrt, dass man die Function Sinus Amplitudo in ein Product zweier Functionen Sinus Amplitudo verwandeln kann, so, dass der Modul dieser Functionen der vergrösserte Modul k_1 ist. Für einen schon beliebig vergrösserten Modul k_n und das Argument v wird daher auch sein

$$\sin am\,(v,k_n) = (1+k'_{n+1})\sin am\,\frac{K_{n+1}}{2K_n}\,v\,\sin am\,\left\{\frac{K_{n+1}}{2K_n}(v+2K_n)\right\}.$$
$$(\text{Mod. } k_{n+1})$$

Da man nun jeden in der Gleichung (2) enthaltenen Factor auf's Neue in zwei Factoren zerfällen und diese Zerfällung so weit als man nur will fortsetzen kann, so ergiebt sich ein Mittel, $\sin am\,u$ in Factoren zu zerfällen. Man erhält nämlich nun

$$\sin am\,(\frac{K_1 u}{2K},\,k_1) = (1+k'_2)\sin am\,\frac{K_2}{2K_1}\cdot\frac{K_1 u}{2K}$$
$$.\sin am\,\left\{\frac{K_2}{2K_1}(\frac{K_1 u}{2K} + 2K_1)\right\}.\quad (\text{Mod. } k_2)$$

$$= (1+k'_2)\sin am\,\frac{K_2 u}{2^2K}\sin am\,\frac{K_2}{2^2K}(u+4K).\quad (\text{Mod. } k_2)$$

$$\sin am\,\left\{\frac{K_1}{2K}(u+2K),\,k_1\right\} = (1+k'_2)\sin am\,\frac{K_2}{2^2K}(u+2K)$$
$$.\sin am\,\frac{K_2}{2K_1}(\frac{K_1}{2K}(u+2K)+2K_1).\quad (\text{Mod. } k_2)$$

Hier ist das letzte Argument gleich

$$\frac{K_2}{2^2K}(u+6K);$$

weil aber auch

$$\sin\,(am\,v,\,k_2) = \sin am\,(2K_2 - v,\,k_2)$$

ist, so kann man, ohne den Werth von sin *am* zu ändern, dieses Argument auch von $2K_2$ abziehen und erhält dann

$$2K_2 - \frac{K_2}{2^2K}(u + 6K) = \frac{K_2}{2^2K}(2K - u),$$

mithin

$$\sin am \left\{\frac{K_1}{2K}(u + 2K), k_1\right\} = (1 + k'_2) \sin am \frac{K_2}{2^2K}(2K + u)$$

$$. \sin am \frac{K_2}{2^2K}(2K - u). \quad (\text{Mod. } k_2)$$

Setzt man nun diese Werthe in (2) hinein, so erhält man

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\sin am (u, k) = (1 + k'_1)(1 + k'_2)^2 \sin am \frac{K_2 u}{2^2K} \\ &\quad . \sin am \frac{K_2}{2^2K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_2}{2^2K}(4K + u), \ (\text{Mod. } k_2) \end{aligned} \right.$$

worin das doppelte Zeichen für zwei Factoren, einer mit dem oberen, der andere mit dem unteren Zeichen, der Kürze wegen geschrieben ist.

Jetzt zerfälle man auf's Neue jeden Sinus Amplitudo in zwei Factoren. Schreiben wir nur die Argumente der letzteren hin, so erhalten wir

aus d. 1ten Factor	1) $\frac{K_3 u}{2^3K}$	2) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2 u}{2^2K} + 2K_2\right)$
aus dem 2ten u. 3ten Factor	3) $\frac{K_3}{2^3K}(2K \pm u)$	4) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2}{2^2K}(2K \pm u) + 2K_2\right)$
aus d. 4ten Factor	5) $\frac{K_3}{2^3K}(4K + u)$	6) $\frac{K_3}{2K_2}\left(\frac{K_2}{2^2K}(4K + u) + 2K_2\right)$

Es ist nun

$$2) = \frac{K_3}{2^3K}(u + 8K); \quad 4) = \frac{K_3}{2^3K}(10K \pm u); \quad 6) = \frac{K_3}{2^3K}(12K + u).$$

Zieht man aber die beiden letzten Argumente von $2K_3$ ab, wodurch Sinus Amplitudo unverändert bleibt, weil k_3 der neue Modul ist, so werden sie

$$4) = \frac{K_3}{2^3K}(6K \mp u), \quad 6) = \frac{K_3}{2^3K}(4K - u),$$

und da nun jeder der vier Factoren in dem Ausdrucke (3) den Coefficienten $(1 + k'_3)$ liefert, so giebt die neue Entwickelung

$$\sin am (u, k) = (1 + k'_1)(1 + k'_2)^2 (1 + k'_3)^4 \sin am \frac{K_3 u}{2^3K}$$

$$. \sin am \frac{K_3}{2^3K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_3}{2^3K}(4K \pm u)$$

$$. \sin am \frac{K_3}{2^3K}(6K \pm u) \sin am \frac{K_3}{2^3K}(8K + u). \ (\text{Mod. } k_3)$$

Hiedurch ist das Gesetz der Fortschreitung klar, und man erhält allgemein

$$(4)\begin{cases} \sin am\,(u,k) = (1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4 \ldots (1+k'_n)^{2^{n-1}} \\ \quad .\sin am \frac{K_n u}{2^n K} \sin am \frac{K_n}{2^n K}(2K \pm u) \sin am \frac{K_n}{2^n K}(4K \pm u) \\ \quad .\sin am \frac{K_n}{2^n K}(6K \pm u) \ldots \sin am \frac{K_n}{2^n K}((2^n-2)K \pm u) \\ \quad .\sin am \frac{K_n}{2^n K}(2^n K + u). \qquad \text{(Mod. } k_n). \end{cases}$$

Denkt man sich nun diese Entwickelung bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird in der Grenze $k_n = 1$, $k'_n = 0$. Wir werden den alsdann entstehenden Werth des Coefficienten der Entwickelung später besonders bestimmen und bezeichnen ihn vorläufig mit A', setzen also

$$A' = (1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4(1+k'_4)^8 \ldots.$$

Dass die Factoren dieses Products zur Grenze 1 convergiren, erhellt daraus, dass man hat

$$1+k'_n = \frac{2}{1+k_{n-1}}, \quad \text{also } (1+k'_n)^{2^{n-1}} = \frac{2^{(2^{n-1})}}{(1+k_{n-1})^{2^{n-1}}},$$

welcher Ausdruck sich um so mehr der Eins nähert, je mehr k_{n-1} dies thut.

Auch die Factoren der Entwickelung (4) müssen zur Eins convergiren. Um dies zu sehen, bemerke man, dass das Argument des letzten Factors sich schreiben lässt

$$K_n + \frac{K_n u}{2^n K}.$$

Da nun der Modul k_n ist, so ist

$$\sin am\left(K_n + \frac{K_n u}{2^n K}\right) = \frac{\cos am \frac{K_n u}{2^n K}}{\Delta\, am \frac{K_n u}{2^n K}}. \quad \text{Mod. } k_n)$$

Wird dann in der Grenze $k_n = 1$, so ist $\cos = \Delta$, mithin der letzte Factor $= 1$.

Den Grenzwerth des in allen Argumenten der Entwickelung (4) vorkommenden Factors $\frac{K_n}{2^n K}$ haben wir § 49 ermittelt; es ist nämlich (28)

$$\lim \frac{K_n}{2^n K} = \frac{\pi}{2K'}.$$

Nach diesem allen erhält man aus (4) für $n = \infty$, wenn man den letzten Factor, der sich in der Grenze der Einheit gleich ergeben hat, als überflüssig fortlässt.

$$\sin am\,(u,k) = A' \sin am \frac{\pi u}{2K'}, \qquad \text{(Mod. 1)}$$

$$.\sin am \frac{\pi}{2K'}(2K'+u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(4K'+u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(6K'+u) \ldots$$

$$.\sin am \frac{\pi}{2K'}(2K'-u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(4K'-u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(6K'-u) \ldots$$

oder, wenn man sich zur Bezeichnung eines Products des Zeichens Π in ähnlicher Weise bedient, wie das Zeichen Σ zur Bezeichnung einer Summe angewandt wird, nämlich

$$\prod_{1}^{\infty}{}^{h} f(h) = f(1)\, f(2)\, f(3)\, f(4) \ldots$$

setzt,

$$(5) \quad \begin{cases} \sin am\,(u,k) = A' \sin am \dfrac{\pi u}{2K'} \displaystyle\prod_{1}^{\infty}{}^{h} \sin am \dfrac{\pi}{2K'}(2hK'+u) \\ \qquad\qquad \text{(Mod. 1)} \qquad . \sin am \dfrac{\pi}{2K'}(2hK'-u). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist nun einer weiteren Entwickelung fähig, wenn man sich erinnert, dass die elliptischen Functionen für den Werth 1 des Moduls in Exponentialfunctionen übergehen. Nach § 4 ist nämlich

$$\sin am\,(v,1) = \frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}.$$

Demnach ist in (5)

$$\sin am \frac{\pi u}{2K'} = \frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}$$

$$\sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK' \pm u) = \frac{e^{\frac{h\pi K}{K'}} e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{h\pi K}{K'}} e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{h\pi K}{K'}} e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{h\pi K}{K'}} e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}.$$

In dem letzteren Ausdrucke führen wir die für die ganze Theorie der Entwickelung der elliptischen Functionen so überaus wichtigen Grössen q und q' ein. Jacobi setzte nämlich*)

*) Jacobi. Fundamenta nova. § 35.

$$(6) \quad \ldots \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}.$$

Dann wird

$$\sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK \pm u) = \frac{q'^{-h} e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}} - q'^{h} e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h} e^{\pm\frac{\pi u}{2K'}} + q'^{h} e^{\mp\frac{\pi u}{2K'}}},$$

$$\sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK + u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK - u)$$

$$= \frac{q'^{-h} e^{\frac{\pi u}{2K'}} - q'^{h} e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h} e^{\frac{\pi u}{2K'}} + q'^{h} e^{-\frac{\pi u}{2K'}}} \cdot \frac{q'^{-h} e^{-\frac{\pi u}{2K'}} - q'^{h} e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{q'^{-h} e^{-\frac{\pi u}{2K'}} + q'^{h} e^{\frac{\pi u}{2K'}}}$$

$$= \frac{q'^{-2h} + q'^{2h} - \left(e^{\frac{\pi u}{K'}} + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)}{q'^{-2h} + q'^{2h} + \left(e^{\frac{\pi u}{K'}} + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)}.$$

Verwandelt man aber die Exponentialfunctionen in trigonometrische mit imaginären Variablen, indem

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = -i \operatorname{tg} iv; \quad e^v + e^{-v} = 2 \cos iv$$

ist, so erhält man

$$\sin am \frac{\pi u}{2K'} = -i \operatorname{tg} \frac{\pi i u}{2K'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK + u) \sin am \frac{\pi}{2K'}(2hK - u) \\ &\qquad (\text{Mod. } 1) \\ &= \frac{q'^{-2h} + q'^{2h} - 2\cos\frac{\pi i u}{K'}}{q'^{-2h} + q'^{2h} + 2\cos\frac{\pi i u}{K'}} \\ &= \frac{1 - 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}}{1 + 2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'} + q'^{4h}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Endlich führe man auch auf der linken Seite der Gleichung (5) iu statt u ein, dann erhält man, weil nach den Formeln (12) des § 8

$$\sin am\,(u,k) = -\,i\,\mathrm{tg}\;am\,(iu,k')$$

ist, mit Weglassung des auf beiden Seiten gemeinschaftlichen Factors $-\,i$,

$$\mathrm{tg}\;am\;(iu,k') = A'\;\mathrm{tg}\,\frac{\pi i u}{2K'}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\;\frac{1-2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h}}{1+2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h}}.$$

Setzt man nun noch u statt iu und zugleich auch k statt k', wodurch auch K' in K, K in K' und, wie die Formeln (6) zeigen, q' in q übergeht, bezeichnet ferner mit A die Grösse, in welche die ebenfalls nur von k' abhängige Grösse A' dann übergeht, setzt man also

$$(8)\qquad A = (1+k_0)\,(1+k_{00})^2\,(1+k_{(3)})^4\,(1+k_{(4)})^8\,\ldots\ldots$$

so erhält man für die Entwickelung von $\mathrm{tg}\;am\;u$ folgendes unendliche Product:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}\;am\;(u,k) &= A\;\mathrm{tg}\,\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\;\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}\\ &= A\;\mathrm{tg}\,\frac{\pi u}{2K}\;\frac{1-2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}\\ &\quad\cdot\frac{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8}{1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8}\\ &\quad\cdot\frac{1-2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(9)$$

§ 52.

Die Grössen q und q', welche für die Entwickelung der elliptischen Functionen von der grössten Bedeutung sind, sind im Allgemeinen sehr kleine Grössen, sodass das vorstehende unendliche Product sehr rasch convergirt. Es hat keine Schwierigkeit, sie aus den Formeln (6) zu berechnen. Denn man erhält

$$\log q = -\,\pi\,\frac{K'}{K},\qquad \log q' = -\,\pi\,\frac{K}{K'}.$$

Bezeichnet also M den Modulus des Briggischen Logarithmensystems, so ist

$$\text{Brigg. Log. } q = -M\pi\frac{K'}{K}; \quad \text{Brigg. Log. } q' = -M\pi\frac{K}{K'}.$$

Ausserdem erhält man q' aus q oder umgekehrt, da sich leicht die Relation

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \log q \log q' = \pi^2$$

ergiebt. Für den Mittelwerth $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $k = k'$, also auch $K = K'$, folglich dann

$$\text{Brigg. Log } q = -M\pi.$$

Nun ist

$$\begin{array}{l} \pi \ldots 0{,}4971498.7 \\ M \ldots 9{,}6377842.8 \\ \hline M\pi \,.\, 0{,}1349341.5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Brigg. Log } q &= -1{,}3643762.6 \\ &= 8{,}6356237.4 \\ q &= 0{,}0432138. \end{aligned}$$

Also für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist q ungefähr $= \frac{1}{23}$. Bildet man die verschiedenen Potenzen dieses Mittelwerths von q, so ergiebt sich:

$q^2 \ldots 7{,}2712474.8 = 0{,}0018674 \quad q^5 \ldots 3{,}1781187.0 = 0{,}0000001.5$
$q^3 \ldots 5{,}9068712.2 = 0{,}0000807 \quad q^6 \ldots 1{,}8137424.4 = 0{,}0000000.0$
$q^4 \ldots 4{,}542\,4949.6 = 0{,}0000035.$

Daraus geht hervor, dass in der Entwickelung (9) für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ der dritte Factor schon keinen Einfluss mehr auf die 7te Decimale hat.

Eine Methode, q unmittelbar aus k zu berechnen, erhält man auf folgendem Wege. Wir haben § 50 (31) eine Relation zwischen K und K' kennen gelernt, nämlich die folgende:

$$K' = \frac{2K}{\pi} \frac{\log \frac{4}{k_{(n)}}}{2^n},$$

welche desto richtiger ist, je grösser n angenommen wird und für $n = \infty$ vollkommen genau ist. Daraus folgt

$$\pi\frac{K'}{K} = \frac{\log \frac{16}{k^2_{(n)}}}{2^n} = \log \sqrt[2^n]{\frac{16}{k^2_{(n)}}}; \quad -\pi\frac{K'}{K} = \log \sqrt[2^n]{\frac{k^2_{(n)}}{16}},$$

folglich ist

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = \sqrt[2^n]{\frac{k^2_{(n)}}{16}}.$$

Um nun diesen Ausdruck aus dem Modul herzuleiten, setzen wir zur Abkürzung $\frac{k^2}{16k'} = \delta$, und wenn wir von k zu k_0, k_{00}, etc. fortschreiten,

$$\frac{k_0^2}{16k'_0} = \delta_0 \quad \frac{k^2_{00}}{16k'_{00}} = \delta_{00}, \;\ldots\ldots\; \frac{k^2_{(n)}}{16k'_{(n)}} = \delta_{(n)}.$$

Da nun $k'_{(n)}$ in der Grenze 1 ist, und zwar eher diese Grenze erreicht, als $k_{(n)}$ verschwindet, so ist auch

$$\delta_{(n)} = \frac{k^2_{(n)}}{16}, \quad \text{mithin} \quad q = \sqrt[2^n]{\delta_{(n)}}.$$

und es kommt nun darauf an, $\delta_{(n)}$ aus δ zu berechnen. Nun ist aber:

$$\frac{k^2}{k'} = \frac{1-k'^2}{k'} = \frac{(1-k')(1+k')}{k'} \quad \text{und} \quad k' = \frac{1-k_0}{1+k_0},\; 1+k' = \frac{2}{1+k_0}.$$

$$1-k' = \frac{2k_0}{1+k_0}; \quad \frac{1-k'}{k'} = \frac{2k_0}{1-k_0},$$

mithin wird

$$\frac{k^2}{k'} = \frac{4k_0}{(1-k_0)(1+k_0)} = \frac{4k_0}{k'^2_0}, \quad \text{also} \quad \delta = \frac{k^2}{16k'} = \frac{k_0}{4k'^2_0}.$$

Daraus folgt ferner

$$\delta^2 = \frac{k^2_0}{16k'^4_0}.$$

Dividirt man dieses aber durch δ_0, so erhält man zwischen δ und δ_0 die Relation

$$\frac{\delta^2}{\delta_0} = \frac{1}{k'^3_0} \quad \text{oder} \quad \delta = \sqrt{\frac{\delta_0}{k'^3_0}}.$$

Daraus folgt nun successive:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta_{00}}{k'^3_{00}}} \quad \text{also} \quad \sqrt{\delta_0} = \sqrt[4]{\frac{\delta_{00}}{k'^3_{00}}}$$

$$\delta_{00} = \sqrt{\frac{\delta_{(3)}}{k'^3_{(3)}}} \quad \text{also} \quad \sqrt[4]{\delta_{00}} = \sqrt[8]{\frac{\delta_{(3)}}{k'^3_{(3)}}}$$

. . . .

$$\delta_{(n-1)} = \sqrt{\frac{\delta_{(n)}}{k'^3_{(n)}}} \quad \text{also} \quad \sqrt[2^{n-1}]{\delta_{(n-1)}} = \sqrt[2^n]{\frac{\delta_{(n)}}{k'^3_{(n)}}}.$$

Multiplicirt man also diese Gleichungen, so kommt

$$\delta = \frac{\sqrt[2^n]{\delta_{(n)}}}{\sqrt{k'^3_0}\ \sqrt[4]{k'^3_{00}}\ \sqrt[8]{k'^3_{000}} \cdots\cdots \sqrt[2^n]{k'^3_{(n)}}},$$

folglich

$$\sqrt[2^n]{\delta_{(n)}} = q = \delta\ (k'_0)^{\frac{3}{2}} (k'_{00})^{\frac{3}{4}} (k'_{(3)})^{\frac{3}{8}} \cdots\cdots$$

oder

$$q = \frac{k^2}{16k'}\ (k'_0)^{\frac{3}{2}} (k'_{00})^{\frac{3}{4}} (k'_{(3)})^{\frac{3}{8}} (k'_{(4)})^{\frac{3}{16}} \cdots\cdots$$

$$= \frac{k_0}{4k'^2_0}\ \left\{(k'_0)^{\frac{1}{2}} (k'_{00})^{\frac{1}{4}} (k'_{(3)})^{\frac{1}{8}} (k'_{(4)})^{\frac{1}{16}} \cdots\cdots\right\}^3.$$

§ 53.

Aus der Entwickelung (9) leitet sich nun zuerst ein unendliches Product für $\Delta\, am\, u$ ab, wenn man $u + iK'$ statt u setzt weil nämlich (§ 10 S. 28)

$$\text{tg}\, am\, (u + iK') = \frac{i}{\Delta\, am\, u}$$

ist. Bequemer aber wird diese Umformung, wenn man von der Formel (5) ausgeht, darin zuerst $u + K$ statt u, und dann u für iu und k für k' setzt, wodurch man dasselbe Resultat erhält. Setzt man also in (5) $u + K$ für u, so kommt, weil

$$\sin am\, (u + K) = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}$$

ist,

$$\frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} = A' \sin am\, \frac{\pi(u + K)}{2K'} \prod_1^\infty{}^{h} \sin am\, \frac{\pi((2h+1)K + u)}{2K'}$$
$$.\sin am\, \frac{\pi((2h-1)K - u)}{2K'} \quad \text{(Mod. 1)}.$$

Nun stellt $2h - 1$ die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, etc. und
$2h + 1$ die Zahlen 3, 5, 7, 9, etc. dar.

Bemerkt man daher, dass der ausserhalb des Zeichens Π stehende Factor $\sin am\, \frac{\pi(u+K)}{2K'}$ gerade der in der zweiten Reihe fehlende ist, so kann man diesen unter das Zeichen Π stellen, wenn man unter demselben statt $2h + 1$ auch $2h - 1$ setzt. Folglich ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} &= A' \prod_1^\infty{}^{h} \sin am\, \frac{\pi((2h-1)K + u)}{2K'}. \\ &.\sin am\, \frac{\pi((2h-1)K - u)}{2K'} \quad \text{(Mod. 1)}. \end{aligned}\right\} (11)$$

Alsdann aber unterscheidet sich das unter Π stehende Product von dem in Gleichung (7) umgeformten nur dadurch, dass $2h-1$ an die Stelle von $2h$ getreten ist. Setzt man also in (7) nur $2h-1$ statt $2h$ und also auch $4h-2$ statt $4h$, so erhält man

$$\sin am \frac{\pi((2h-1)K+u)}{2K'} \sin am \frac{\pi((2h-1)K-u)}{2K'}$$
$$= \frac{1-2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi iu}{K'}+q'^{4h-2}}{1+2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi iu}{K'}+q'^{4h-2}}.$$
(Mod. 1.)

Führt man nun auch auf der linken Seite der Gleichung (11) iu ein, indem man nach § 8 hat:

$$\cos am(u,k) = \frac{1}{\cos am(iu,k')}; \quad \Delta am(u,k) = \frac{\Delta am(iu,k')}{\cos am(iu,k')},$$

woraus

$$\frac{\cos am(u,k)}{\Delta am(u,k)} = \frac{1}{\Delta am(iu,k')}$$

folgt, so erhält man aus (11)

$$\frac{1}{\Delta am(iu,k')} = A' \prod_1^\infty {}_h \frac{1-2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi iu}{K'}+q'^{4h-2}}{1+2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi iu}{K'}+q'^{4h-2}}$$

und, wenn man nun statt iu, k' K', q', A' resp. u, k, K, q, A setzt und die Brüche umkehrt,

$$(12) \qquad \Delta am(u,k) = \frac{1}{A} \prod_1^\infty {}_h \frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}$$

$$= \frac{1}{A}\cdot\frac{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos\frac{\pi u}{K}+q^6}{1-2q^3\cos\frac{\pi u}{K}+q^6}\cdot\frac{1+2q^5\cos\frac{\pi u}{K}+q^{10}}{1-2q^5\cos\frac{\pi u}{K}+q^{10}}\cdots\cdots$$

Wir kennen jetzt Entwickelungen für tg $am\, u$ und $\Delta\, am\, u$. Daraus ergeben sich sofort auch Entwickelungen für sin $am\, u$ und cos $am\, u$. Erinnert man sich nämlich der im § 10 be-

merkten Eigenschaft, dass die Functionen sin *am u* und Δ *am u* für dieselben Werthe von u unendlich gross werden, so weiss man, dass diese beiden Functionen bis auf einen von u unabhängigen Factor denselben Nenner haben müssen. Da aber ferner sin *am u* und tg *am u* für dieselben Werthe von u Null werden, so müssen sin *am u* und tg *am u* bis auf einen constanten Factor denselben Zähler haben. Folglich hat sin *am u* denselben Zähler wie tg *am u* und denselben Nenner wie Δ *am u*. Bezeichnet also B eine neue, später zu bestimmende Grösse, welche nur von k abhängig, von u aber unabhängig ist, so hat man sofort:

$$(13)\quad \sin am\,(u,k) = B \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}},$$

und weil ferner

$$\cos am\, u = \frac{\sin am\, u}{\operatorname{tg} am\, u}$$

ist,

$$(14)\quad \cos am\,(u,k) = \frac{B}{A} \cos \frac{\pi u}{2K} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}.$$

§ 54.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Constanten A und B. Diese geschieht dadurch, dass man für u specielle Werthe in die Formeln (12), (13), (14) einsetzt, nämlich die Werthe o, K und $K + iK'$. Dadurch werden sich dann zugleich wichtige Relationen zwischen k, K und q ergeben.

Setzt man zuerst $u = o$, so folgt

aus (13) $\quad 1)\ o = o,$

aus (14) $\quad 2)\ 1 = \frac{B}{A} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$

aus (12) $\quad 3)\ 1 = \frac{1}{A} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right)^2.$

Ferner für $u = K$ folgt

aus (13) $\quad 4)\ 1 = B \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$

aus (14) $\quad 5)\ o = o$

aus (12) $\qquad$ 6) $k' = \frac{1}{\varDelta} \prod_{1}^{\infty}{}^{h} \left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2.$

Setzt man endlich $u = K + iK'$, so bemerke man zuerst die § 10 abgeleiteten Formeln

$$\sin am\,(K + iK') = \frac{1}{k},\ \cos am\,(K + iK') = -\,i\,\frac{k'}{k},$$

$$\varDelta\, am\,(K + iK') = 0.$$

Ferner hat man die Werthe der in (13), (14), (12) vorkommenden Ausdrücke $\sin \frac{\pi u}{2K}$, $\cos \frac{\pi u}{2K}$, $2 \cos \frac{\pi u}{K}$ für $u = K + iK'$ zu ermitteln.

Es ist aber

$$\sin \frac{\pi(K+iK')}{2K} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i K'}{2K}\right) = \cos \frac{\pi i K'}{2K}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi K'}{2K}} + e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+q}{2\sqrt{q}}$$

$$\cos \frac{\pi(K+iK')}{2K} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i K'}{2K}\right) = -\sin \frac{\pi i K'}{2K}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,i\left(e^{\frac{\pi K'}{2K}} - e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\right) = -\tfrac{1}{2}\,i\left(q^{-\frac{1}{2}} - q^{+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\,i\,\frac{1-q}{2\sqrt{q}}$$

$$2\cos \frac{\pi(K+iK')}{K} = 2\cos\left(\pi + \frac{\pi i K'}{K}\right) = -\,2\cos \frac{\pi i K'}{K}$$

$$= -\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right) = -\left(q^{-1} + q\right) = -\,\frac{1+q^2}{q}.$$

Dadurch wird

$$1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 + q^{2h-1}(1 + q^2) + q^{4h}$$

$$= 1 + q^{2h-1} + q^{2h+1} + q^{4h} = (1 + q^{2h-1})(1 + q^{2h+1})$$

$$1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 - q^{2h-1}(1 + q^2) + q^{4h}$$

$$= 1 - q^{2h-1} - q^{2h+1} + q^{4h} = (1 - q^{2h-1})(1 - q^{2h+1})$$

$$1 + 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-2}(1 + q^2) + q^{4h-2}$$

$$= 1 - q^{2h-2} - q^{2h} + q^{4h-2} = (1 - q^{2h-2})(1 - q^{2h})$$

$$1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 + q^{2h-2}(1 + q^2) + q^{4h-2}$$

$$= 1 + q^{2h-2} + q^{2h} + q^{4h-2} = (1 + q^{2h-2})(1 + q^{2h})$$

und folglich:

aus (13) $\quad 7) \quad \frac{1}{k} = B \frac{1+q}{2\sqrt{q}} \prod_1^\infty {}^{h} \frac{(1 + q^{2h-1})(1 + q^{2h+1})}{(1 + q^{2h-2})(1 + q^{2h})}$

aus (14) $\quad 8) - i\frac{k'}{k} = -i \frac{B}{A} \frac{1-q}{2\sqrt{q}} \prod_1^\infty {}^{h} \frac{(1 - q^{2h-1})(1 - q^{2h+1})}{(1 + q^{2h-2})(1 + q^{2h})}$

aus (12) $\quad 9) \quad 0 = \frac{1}{A} \prod_1^\infty {}^{h} \frac{(1 - q^{2h-2})(1 - q^{2h})}{(1 + q^{2h-2})(1 + q^{2h})}$.

In 7) unterscheiden sich die beiden Factoren $(1 + q^{2h-1})$ und $(1 + q^{2h+1})$ nur dadurch, dass letzterer den Factor $1 + q$ nicht enthält. Dieser steht aber vor dem Zeichen Π, also kann man den Zähler schreiben

$$\prod_1^\infty {}^{h} (1 + q^{2h-1})^2;$$

im Nenner ist für $h = 1$, $(1 + q^{2h-2}) = 2$; setzt man diesen Factor heraus, so werden die beiden Factoren ebenfalls gleich, und der Nenner lässt sich schreiben

$$\prod_1^\infty {}^{h} (1 + q^{2h})^2.$$

Da nun dieselben Umstände auch in 8) stattfinden, so hat man

$$7) \quad \frac{1}{k} = \frac{B}{4\sqrt{q}} \prod_1^\infty {}^{h} \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2$$

$$8) \quad \frac{k'}{k} = \frac{B}{A} \frac{1}{4\sqrt{q}} \prod_1^\infty {}^{h} \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2$$

$$9) \quad 0 = 0,$$

letzteres weil der Factor $1 - q^{2h-2}$ für $h = 1$ verschwindet.

Ehe wir hieraus die Werthe von A und B bestimmen, wollen wir die scheinbar identischen Relationen 1), 5), 9) näher untersuchen. In den rechten Seiten der Gleichungen (13), (14), (12) verschwindet nämlich jedesmal nur ein einziger Factor, und zwar in (13) $\sin\frac{\pi u}{2K}$ für $u = o$, in (14) $\cos\frac{\pi u}{2K}$ für $u = K$ und, wie wir eben sahen, in (12) der dem Werthe $h = 1$ entsprechende Factor $(1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + q^2)$ für $u = K + iK'$. Dividiren wir also mit diesen Factoren, so erhalten wir rechts Ausdrücke, die von 0 verschieden sind, und links Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$, deren Werthe wir bestimmen können. Auf diese Weise ergiebt sich zunächst

aus (13) $$1)\quad \left[\frac{\sin am\, u}{\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=o} = B \prod_{1}^{\infty}{}_h \left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$$

aus (14) $$5)\quad \left[\frac{\cos am\, u}{\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K} = \frac{B}{A} \prod_{1}^{\infty}{}_h \left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$$

aus (12) $$9)\quad \left[\frac{\Delta\, am\, u}{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}\right]_{u=K+iK'}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{A(1-q^2)} \prod_{1}^{\infty}{}_h \left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\right)^2,$$

die letztere Gleichung, weil den obigen Bemerkungen zufolge

$$\prod_{1}^{\infty}{}_h (1+q^{2h-2})(1+q^{2h}) = 2\prod_{1}^{\infty}{}_h (1+q^{2h})^2, \text{ und}$$

$$\prod_{2}^{\infty}{}_h (1-q^{2h-2})(1-q^{2h}) = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots$$
$$(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots$$
$$= \frac{1}{1-q^2}\prod_{1}^{\infty}{}_h (1-q^{2h})^2$$

ist. Um nun die linker Hand stehenden Werthe zu bestimmen, differentiire man im Zähler und Nenner nach u, so kommt

$$\left[\frac{\sin am\, u}{\sin \frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=o} = \left[\frac{\cos am\, u\ \Delta\, am\, u}{\frac{\pi}{2K}\cos\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=o} = \frac{2K}{\pi}$$

$$\left[\frac{\cos am\, u}{\cos \frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K} = \left[\frac{-\sin am\, u\ \Delta\, am\, u}{-\frac{\pi}{2K}\sin\frac{\pi u}{2K}}\right]_{u=K} = \frac{2k'K}{\pi}$$

$$\left[\frac{\Delta\, am\, u}{1+2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}\right]_{u=K+iK'} = \left[\frac{-k^2\sin am\, u\cos am\, u}{-2q\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi u}{K}}\right]_{u=K+iK'}$$

$$= \frac{k'K}{\pi(1-q^2)}.$$

Der letztere Werth ergiebt sich folgendermassen. Es ist

$$\sin\frac{\pi(K+iK')}{K} = \sin\left(\pi+\frac{\pi iK'}{K}\right) = -\sin\frac{\pi iK'}{K} =$$

$$-\tfrac{1}{2}i\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} - e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}i\left(q^{-1}-q\right) = -i\,\frac{1-q^2}{2q}.$$

Setzt man diesen Werth nebst den Werthen $\sin am\,(K+iK') = \frac{1}{k}$ und $\cos am\,(K+iK') = -i\frac{k'}{k}$ ein, so ergiebt sich Obiges. Hienach ist nun das vollständige Tableau der 9 Formeln folgendes:

$$1)\quad \frac{2K}{\pi} = B\prod\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$$

$$2)\quad 1 = \frac{B}{A}\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$$

$$3)\quad 1 = \frac{1}{A}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right)^2$$

$$4)\quad 1 = B\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$$

$$5)\quad \frac{2k'K}{\pi} = \frac{B}{A}\prod\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2$$

$$6)\ k' = \frac{1}{A} \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h-1}}\right)^2$$

$$7)\ \frac{1}{k} = \frac{B}{4\sqrt{q}} \prod \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2$$

$$8)\ \frac{k'}{k} = \frac{B}{A} \frac{1}{4\sqrt{q}} \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2$$

$$9)\ \frac{2k'K}{\pi} = \frac{1}{A} \prod \left(\frac{1 - q^{2h}}{1 + q^{2h}}\right)^2.$$

Daraus ergiebt sich:

$$B = \frac{2K}{\pi} \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 - q^{2h}}\right)^2 = \prod \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{k} \prod \left(\frac{1 + q^{2h}}{1 + q^{2h-1}}\right)^2$$

$$\frac{B}{A} = \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2 = \frac{2k'K}{\pi} \prod \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 - q^{2h}}\right)^2$$

$$= \frac{4k'\sqrt{q}}{k} \prod \left(\frac{1 + q^{2h}}{1 - q^{2h-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{A} = \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h-1}}\right)^2 = k' \prod \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 - q^{2h-1}}\right)^2$$

$$= \frac{2k'K}{\pi} \prod \left(\frac{1 + q^{2h}}{1 - q^{2h}}\right)^2$$

also:

$$B = \prod \left(\frac{1 + q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{B}{A} = \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h}}\right)^2 = \frac{2\sqrt{k'}\ \sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{A} = \prod \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h-1}}\right)^2 = \sqrt{k'}.$$

Ferner aber:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2K}{\pi} &= \prod \left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 \\
\frac{2kK}{4\pi\sqrt{q}} &= \prod \left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 \\
&= \prod \left(\frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}\right)^2 \\
\frac{2k'K}{\pi} &= \prod \left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 \\
&= \prod \left(\frac{1-q^h}{1+q^h}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

weil nämlich $2h-1$ alle ungeraden, und $2h$ alle geraden, beide zusammen also alle ganzen Zahlen darstellen. In sämmtlichen Producten sind für h alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ zu setzen. Die Formel $\frac{1}{A} = \sqrt{k'}$ hätte man auch unmittelbar aus dem Ausdrucke (8) § 51

$$A = (1+k_0)(1+k_{00})^2(1+k_{(3)})^4(1+k_{(4)})^8 \ldots\ldots$$

ableiten können. Setzt man nämlich nach § 46. S. 173

$$1+k_0 = \frac{k'_0}{\sqrt{k'}}, \quad 1+k_{00} = \frac{k'_{00}}{\sqrt{k'_0}}, \quad 1+k_{(3)} = \frac{k'_{(3)}}{\sqrt{k'_{00}}}, \text{ etc.,}$$

so wird

$$A = \frac{k'_0}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{k'^2_{00}}{k'_0} \cdot \frac{k'^4_{(3)}}{k'^2_{00}} \cdot \frac{k'^8_{(4)}}{k'^4_{(3)}} \cdots\cdot$$

Es hebt sich daher jeder Zähler gegen den folgenden Nenner auf, und da die Zähler zur Grenze Eins convergiren, so wird

$$A = \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Die obigen Formeln enthalten interessante Beziehungen zwischen k, K und q, und zwar geben die folgenden drei

$$\left.\begin{aligned} k &= 4\sqrt{q}\,\prod\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^4 \\ k' &= \prod\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^4 \\ K &= \frac{\pi}{2}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

unmittelbare Ausdrücke für k, k' und K durch q allein. Die erste derselben kann auch zur indirecten Berechnung von q unmittelbar aus k dienen. Schreibt man nämlich diese Formel so:

$$q = \frac{k^2}{16}\prod\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^8,$$

so sieht man, dass, wenn man zuerst in dem unendlichen Product die kleine Grösse q ganz vernachlässigt, $\frac{k^2}{16}$ als der erste Näherungswerth von q zu betrachten ist, mit welchem man die Rechnung durchzuführen und dann dieselbe so lange zu wiederholen hat, bis der resultirende Werth von q keine Aenderung mehr erleidet. Wenn $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so kann man auch zuerst q' berechnen nach der Formel

$$q' = \frac{k'^2}{16}\prod\left(\frac{1+q'^{2h-1}}{1+q'^{2h}}\right)^8,$$

welche sich aus der vorigen durch Vertauschung von k, q mit k', q' ergiebt, und dann q nach der Formel

$$\log q \log q' = \pi^2 \quad \text{oder} \quad \text{Brigg. Log}\, q = \frac{M^2\pi^2}{\text{Brigg. Log.}\, q'}.$$

Ausser diesen Formeln wird auch noch die Formel

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{2k'K}{\pi} = \prod\left(\frac{1-q^h}{1+q^h}\right)^2$$

sich in der Folge als wichtig erweisen.

Nach Bestimmung der Constanten haben wir nun vollständig:*)

---

*) Jacobi. Fundamenta nova. pag. 88.

$$(18)\quad \sin am\, u = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin\frac{\pi u}{2K} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}$$

$$(18.\text{a})\quad \cos am\, u = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \cos\frac{\pi u}{2K} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}$$

$$(18.\text{b})\quad \Delta\, am\, u = \sqrt{k'} \prod_{1}^{\infty}{}_{h} \frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}$$

Vierzehnter Abschnitt.

Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen.

---

§ 55.

Um aus der vorstehenden Entwickelung der elliptischen Functionen in unendliche Producte Entwickelungen in unendliche Reihen abzuleiten, bedient man sich mit Vortheil des Mittels der logarithmischen Differentiation. Nun ist aber:

$$(19)\quad \frac{d\log\sin am\, u}{du} = \frac{\cos am\, u\, \Delta\, am\, u}{\sin am\, u} = \frac{k'\cos am\, u}{\cos am\,(K-u)}$$

$$(19.\text{a})\quad \frac{d\log\cos am\, u}{du} = -\frac{\sin am\, u\, \Delta\, am\, u}{\cos am\, u} = -\frac{\sin am\, u}{\sin am\,(K-u)}$$

$$(19.\text{b})\quad \frac{d\log\Delta\, am\, u}{du} = -\frac{k^2\sin am\, u\cos am\, u}{\Delta\, am\, u}$$

$$= -k^2\sin am\, u\, \sin am\,(K-u).$$

Wenn man daher die obigen unendlichen Producte unmittelbar durch den Logarithmus hindurch differentiirt, so erhält man nicht sowohl Reihen für die einfachen elliptischen Functionen selbst, als vielmehr für Combinationen derselben. Man kann aber solche

Ausdrücke bilden, welche logarithmisch differentiirt zu den einfachen Functionen führen. Solche sind:

$$(20)\qquad \sqrt{\frac{1-\sin am\, u}{1+\sin am\, u}},\quad \sqrt{\frac{1-\cos am\, u}{1+\cos am\, u}},\quad \sqrt{\frac{1-\Delta\, am\, u}{1+\Delta\, am\, u}}.$$

Es ist nämlich:

$$\frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\sin am\, u}{1+\sin am\, u}}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\log(1-\sin am\, u)}{du}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\frac{d\log(1+\sin am\, u)}{du}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos am\, u\,\Delta\, am\, u}{1-\sin am\, u} + \frac{\cos am\, u\,\Delta\, am\, u}{1+\sin am\, u}\right\}$$

$$= -\frac{\cos am\, u\,\Delta\, am\, u}{\cos^2 am\, u} = -\frac{\Delta\, am\, u}{\cos am\, u}$$

$$(21)\qquad \ldots\ldots = -\frac{1}{\sin am(K-u)} = -\operatorname{cosec} am(K-u)$$

$$\frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\cos am\, u}{1+\cos am\, u}}\right) = \frac{\sin am\, u\,\Delta\, am\, u}{\sin^2 am\, u} = \frac{\Delta\, am\, u}{\sin am\, u}$$

$$(21.\text{a})\qquad \ldots\ldots = \frac{k'}{\cos am(K-u)} = k' \sec am\,(K-u)$$

$$(21.\text{b})\qquad \frac{d}{du}\left(\log\sqrt{\frac{1-\Delta\, am\, u}{1+\Delta\, am\, u}}\right) = \frac{k^2\sin am\, u\cos am\, u}{k^2\sin^2 am\, u} = \operatorname{cotg} am\, u$$

$$= k' \operatorname{tg} am\,(K-u).$$

Man erhält also zunächst Reihen für die Functionen

$$\frac{1}{\sin am(K-u)},\quad \frac{1}{\cos am(K-u)},\quad \operatorname{tg} am\,(K-u).$$

Setzt man in diesen $K-u$ statt u, so gehen sie, abgesehen von den constanten Coefficienten, über in

$$\frac{1}{\sin am\, u},\quad \frac{1}{\cos am\, u},\quad \operatorname{tg}\, am\, u.$$

Setzt man darin aufs neue $u+iK'$ statt u, so wird man nach den Formeln des § 10 auf

$$\sin\, am\, u,\quad \frac{\sin am\, u}{\Delta\, am\, u}\ \text{od.}\ \cos am\,(K-u),\quad \frac{1}{\Delta\, am\, u}$$

geführt, und wenn man noch einmal $K-u$ statt u setzt, auf

$$\sin\, am\,(K-u),\quad \cos\, am\, u,\quad \frac{1}{\Delta\, am\,(K-u)}.$$

Endlich erhält man auch $\Delta\, am\, u$, wenn man in $\operatorname{cotg} am\, u$ $u+iK'$ statt u setzt.

Um nun aber nach diesem Schema verfahren zu können, müssen zuerst die Ausdrücke (20) in Factoren zerlegt werden, damit man sie nach den Formeln (18) in unendliche Producte entwickeln kann.

Aus den Formeln 21) und 22) des § 29 folgt durch Division

$$\frac{1-\sin am(u+v)}{1+\sin am(u+v)} = \frac{(\cos am v - \sin am u \,\Delta\, am v)^2}{(\cos am u + \sin am v \,\Delta\, am u)^2},$$

und wenn man darin $v = u$ setzt und dann u statt $2u$, also auch $\frac{1}{2}u$ statt u schreibt,

$$\frac{1-\sin am u}{1+\sin am u} = \left(\frac{\cos am \frac{1}{2}u - \sin am \frac{1}{2}u \,\Delta\, am \frac{1}{2}u}{\cos am \frac{1}{2}u + \sin am \frac{1}{2}u \,\Delta\, am \frac{1}{2}u}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\dfrac{\cos am \frac{1}{2}u}{\Delta\, am \frac{1}{2}u} - \sin am \frac{1}{2}u}{\dfrac{\cos am \frac{1}{2}u}{\Delta\, am \frac{1}{2}u} + \sin am \frac{1}{2}u}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin am u}{1+\sin am u}} = \frac{\sin am(\frac{1}{2}u+K) - \sin am \frac{1}{2}u}{\sin am(\frac{1}{2}u+K) + \sin am \frac{1}{2}u}.$$

Wendet man alsdann hierauf die aus den Formeln 4) und 5) des § 29 folgende Relation

$$\frac{\sin am(x+y) - \sin am(x-y)}{\sin am(x+y) + \sin am(x-y)} = \frac{\sin am y \cos am x \,\Delta\, am x}{\sin am x \cos am y \,\Delta\, am y}$$

an, indem man

$$x = \tfrac{1}{2}(u+K), \qquad y = \tfrac{1}{2}K$$

setzt, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1-\sin am u}{1+\sin am u}} = \frac{\sin am \frac{1}{2}K \cos am \frac{1}{2}(u+K) \,\Delta\, am \frac{1}{2}(u+K)}{\sin am \frac{1}{2}(u+K) \cos am \frac{1}{2}K \,\Delta\, am \frac{1}{2}K},$$

und weil nach § 10

$$\operatorname{tg} am \tfrac{1}{2}K = \sqrt{\frac{1}{k'}}, \quad \Delta\, am \tfrac{1}{2}K = \sqrt{k'}$$

ist,

$$(22) \qquad \sqrt{\frac{1-\sin am u}{1+\sin am u}} = \frac{1}{k'} \; \frac{\cos am \frac{1}{2}(u+K) \,\Delta\, am \frac{1}{2}(u+K)}{\sin am \frac{1}{2}(u+K)}.$$

In ähnlicher Weise erhält man aus 25) und 26) § 29

$$\frac{1-\cos am(u+v)}{1+\cos am(u+v)} = \left(\frac{\sin am u \,\Delta\, am v + \sin am v \,\Delta\, am u}{\cos am u + \cos am v}\right)^2,$$

und wenn man darin $v = u$ und dann $\frac{1}{2}u$ statt u setzt,

$$(23) \quad . \quad . \quad \sqrt{\frac{1 - \cos am\, u}{1 + \cos am\, u}} = \frac{\sin am \frac{1}{2}u\, \varDelta\, am \frac{1}{2}u}{\cos am \frac{1}{2}u}.$$

Endlich erhält man aus 27) und 28) § 29

$$\frac{1 - \varDelta\, am\,(u+v)}{1 + \varDelta\, am\,(u+v)} = \frac{k^2 \sin^2(am\, u + am\, v)}{(\varDelta\, am\, u + \varDelta\, am\, v)^2},$$

also ebenso wie vorhin auch

$$(24) \quad . \quad . \quad \sqrt{\frac{1 - \varDelta\, am\, u}{1 + \varDelta\, am\, u}} = \frac{k \sin am \frac{1}{2}u \cos am \frac{1}{2}u}{\varDelta\, am \frac{1}{2}u}.$$

Die in den Formeln (22), (23), (24) enthaltenen Ausdrücke sind nun nach den Gleichungen (18) leicht zu bilden. Zuerst erhält man

$$\frac{\cos am\, u\, \varDelta\, am\, u}{\sin am\, u} = k' \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} \prod \frac{1 + 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}} \cdot \frac{1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}},$$

und da die Symbole $2h - 1$ und $2h$ vereint alle ganzen Zahlen, die Symbole $4h - 2$ und $4h$ vereint aber alle geraden Zahlen darstellen,

$$\frac{\cos am\, u\, \varDelta\, am\, u}{\sin am\, u} = k' \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} \prod \frac{1 + 2q^{h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2h}}{1 - 2q^{h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2h}}.$$

Darin hat man der Gleichung (22) gemäss $\frac{1}{2}(u + K)$ statt u zu setzen, dann ist

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi(u+K)}{4K} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{4K}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\pi u}{2K}}{1 + \sin \frac{\pi u}{2K}}}$$

$$\cos \frac{\pi(u+K)}{2K} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{2K}\right) = -\sin \frac{\pi u}{2K},$$

also erhält man

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1-\sin am\, u}{1+\sin am\, u}}\\&=\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+\sin\frac{\pi u}{2K}}}\cdot\Pi\,\frac{1-2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}{1+2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}.\end{aligned}\right.$$

Ebenso ergiebt sich ferner aus (23) und (24) in Verbindung mit (18)

$$(25.\text{ a})\quad \left\{\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1-\cos am\, u}{1+\cos am\, u}}=\operatorname{tg}\frac{\pi u}{4K}\,\Pi\,\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}\cdot\\&\qquad\cdot\frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}\end{aligned}\right.$$

$$(25.\text{ b})\quad \left\{\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1-\Delta am\, u}{1+\Delta am\, u}}\\&=2\sqrt{q}\,\sin\frac{\pi u}{2K}\,\Pi\,\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}\cdot\\&\qquad\cdot\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}}{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}}.\end{aligned}\right.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun aus den unendlichen Producten durch logarithmische Differentiation Reihen ableiten, und zwar auf doppelte Weise. Nimmt man nämlich auf beiden Seiten die Logarithmen und differentiirt alsdann, so erhält man eine Entwickelung in Partialbrüche ähnlich den im § 35 der „Fundamenta" unter 6) und 7) gegebenen Entwickelungen, die man auch durch directe Zerlegung der unendlichen Producte in Partialbrüche erhalten kann. Dies auszuführen, nehmen wir hier Abstand. Dagegen werden wir eine zweite Art näher erörtern, die darin besteht, dass man, wenn man die Logarithmen auf beiden Seiten genommen hat, zuerst diese in ihre Reihen auflöst und dann differentiirt. Dabei werden wir aber, da die auszuführenden Operationen sich in ähnlicher Weise bei den verschiedenen Functionen wiederholen, nur einige derselben wirklich entwickeln. Diese Entwickelungen mögen dann als Muster für

die übrigen in den „Fundamenten" gegebenen Formeln dienen. Zuerst behandeln wir die zweite der Gleichungen (18) und (19). Nimmt man von der zweiten der Gleichungen (18) den Logarithmus, so erhält man

$$(26) \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} \log \cos am\, u = \log \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} + \log \cos \frac{\pi u}{2K} \\ \quad + \sum_1^\infty{}_h \log \left(1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right) \\ - \sum_1^\infty{}_h \log \left(1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right). \end{array} \right.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\pi u}{2K} = x,$$

so ist

$$2 \cos \frac{\pi u}{K} = e^{2ix} + e^{-2ix}$$

$$1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h} = 1 + q^{2h} (e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h}$$
$$= (1 + q^{2h} e^{2ix}) (1 + q^{2h} e^{-2ix})$$

$$1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-1} (e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h-2}$$
$$= (1 - q^{2h-1} e^{2ix}) (1 - q^{2h-1} e^{-2ix}),$$

folglich

$$\log (1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h})$$
$$= \log (1 + q^{2h} e^{2ix}) + \log (1 + q^{2h} e^{-2ix}),$$

$$\log (1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2})$$
$$= \log (1 - q^{2h-1} e^{2ix}) + \log (1 - q^{2h-1} e^{-2ix}).$$

Entwickelt man nun die Logarithmen in Reihen, indem man hat

$$\log (1 + z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \ldots.$$
$$\log (1 - z) = - (z + \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{4} z^4 + \ldots.),$$

so wird

$$\log (1 + q^{2h} e^{2ix})$$
$$= q^{2h} e^{2ix} - \tfrac{1}{2} q^{4h} e^{4ix} + \tfrac{1}{3} q^{6h} e^{6ix} - \tfrac{1}{4} q^{8h} e^{8ix} + \ldots.$$

$$\log (1 + q^{2h} e^{-2ix})$$
$$= q^{2h} e^{-2ix} - \tfrac{1}{2} q^{4h} e^{-4ix} + \tfrac{1}{3} q^{6h} e^{-6ix} - \tfrac{1}{4} q^{8h} e^{-8ix} + \ldots$$

und folglich

$$\log\left(1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$
$$= 2q^{2h} \cos 2x - \tfrac{2}{2} q^{4h} \cos 4x + \tfrac{2}{3} q^{6h} \cos 6x - \tfrac{2}{4} q^{8h} \cos 8x + \ldots.$$

Setzt man jetzt für h alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ und nimmt die Summe, so erhält man, weil

$$\sum_1^\infty {}_h\, z^h = \frac{z}{1-z}$$

ist,

$$(27) \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\infty {}_h \log\left(1 + q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right) \\ \displaystyle = \frac{2q^2}{1-q^2} \cos \frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{2(1-q^4)} \cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^6}{3(1-q^6)} \cos 3\frac{\pi u}{K} - \ldots \end{cases}$$

Ebenso ist

$$\log\left(1 - q^{2h-1} e^{2ix}\right)$$
$$= -\left\{q^{2h-1} e^{2ix} + \tfrac{1}{2} q^{4h-2} e^{4ix} + \tfrac{1}{3} q^{6h-3} e^{6ix} + \ldots\right\}$$
$$\log\left(1 - q^{2h-1} e^{-2ix}\right)$$
$$= -\left\{q^{2h-1} e^{-2ix} + \tfrac{1}{2} q^{4h-2} e^{-4ix} + \tfrac{1}{3} q^{6h-3} e^{-6ix} + \ldots\right\}$$

folglich

$$\log\left(1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$
$$= -\left\{2q^{2h-1} \cos 2x + \tfrac{2}{2} q^{4h-2} \cos 4x + \tfrac{2}{3} q^{6h-3} \cos 6x + \ldots\right\}$$

und daher

$$-\sum_1^\infty {}_h \log\left(1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$
$$= \frac{2q}{1-q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2(1-q^4)} \cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^6)} \cos 3\frac{\pi u}{K} + \ldots.$$

Vereinigt man nun je zwei entsprechende Glieder dieser Reihe und der Reihe (27), so ist

$$\frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{2q}{1-q^2} = \frac{2q(1+q)}{1-q^2} = \frac{2q}{1-q}$$
$$-\frac{2q^4}{2(1-q^4)} + \frac{2q^2}{2(1-q^4)} = \frac{2q^2(1-q^2)}{2(1-q^4)} = \frac{2q^2}{2(1+q^2)}$$
$$\frac{2q^6}{3(1-q^6)} + \frac{2q^3}{3(1-q^6)} = \frac{2q^3(1+q^3)}{3(1-q^6)} = \frac{2q^3}{3(1-q^3)}$$
$$-\frac{2q^8}{4(1-q^8)} + \frac{2q^4}{4(1-q^8)} = \frac{2q^4(1-q^4)}{4(1-q^8)} = \frac{2q^4}{4(1+q^4)},$$

und folglich erhält man

$$\sum_1^\infty {}_h \log\left(1 + 2q^{2h} \cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$

$$- \sum_1^\infty {}_h \log\left(1 - 2q^{2h-1} \cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = \frac{2q}{1-q} \cos\frac{\pi u}{K}$$

$$+ \frac{2q^2}{2(1+q^2)} \cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^3)} \cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{4(1+q^4)} \cos 4\frac{\pi u}{K} + \ldots,$$

und wenn man dies in (26) substituirt,

$$\log\cos am\, u = \log\frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} + \log\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}$$

$$+ \frac{2q^2}{2(1+q^2)} \cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^3)} \cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{4(1+q^4)} \cos 4\frac{\pi u}{K} + \ldots \text{*)}$$

Differentiirt man nun diese Gleichung nach u mit Benutzung der Gleichung (19. a), so erhält man

$$(28) \quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\sin am\, u\, \Delta\, am\, u}{\cos am\, u} \\ \dfrac{\sin am\, u}{\sin am\,(K-u)} \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\pi}{2K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\sin 2\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin 4\frac{\pi u}{K} + \ldots\right\} \text{**)}$$

Aus diesen Formeln gehen durch Einsetzen specieller Werthe die im § 40 der „Fundamente“ gegebenen Reihen hervor, von denen wieder nur zwei als Muster abgeleitet werden mögen. Setzt man in vorstehender Reihe $u = \frac{K}{2}$, so wird die linke Seite $= 1$, ferner wird dann

$$\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} = 1, \quad \sin\frac{\pi u}{K} = 1, \quad \sin 2\frac{\pi u}{K} = 0, \quad \sin 3\frac{\pi u}{K} = -1,$$

$$\sin 4\frac{\pi u}{K} = 0, \quad \sin 5\frac{\pi u}{K} = 1, \quad \text{u. s. w.,}$$

also ergiebt sich

$$(29) \quad \frac{2K}{\pi} = 1 + 4\left\{\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} + \ldots\right\} \text{***)}$$

Von Wichtigkeit ist es auch, eine Reihe für $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ zu besitzen. Diese ergiebt sich, wenn man (28) noch einmal nach u differentiirt. Dann erhält man

---

*) Vgl. Fundamenta. § 39. 7)

**) Fund. § 39. 12)

***) Fund. § 40. 4)

$$\Delta^2\, am\, u + k'^2 \operatorname{tg}^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \Big\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi u}{2K}} + 8\, [\frac{q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{K}$$

$$+ \frac{2q^2}{1+q^2} \cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^3} \cos 3\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4} \cos 4\frac{\pi u}{K} + \ldots .] \Big\},$$

und wenn man darin $u = 0$ setzt,

$$(30) \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\, [\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \ldots] \,^{*)}$$

In der nämlichen Weise lassen sich auch die übrigen im § 40 der „Fundamenta“ gegebenen Reihen ableiten, worauf wir nicht näher eingehen; vielmehr gehen wir nun dazu über, die einfachen elliptischen Functionen in Reihen zu entwickeln, wobei die Rechnung in zwei Beispielen vollständig durchgeführt werden soll.

§ 56.

Wir schreiten zuerst zur Entwickelung der Gleichung (25) des vorigen §, welche uns, wie das daselbst aufgestellte Schema zeigt, zuletzt auf sin *am u* führen wird. Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\frac{\pi u}{2K} = x$$

und nehmen in (25) auf beiden Seiten die Logarithmen, so ergiebt sich

$$(31) \left\{ \begin{aligned} &\log \sqrt{\frac{1 - \sin am\, u}{1 + \sin am\, u}} = \tfrac{1}{2} \log (1 - \sin x) - \tfrac{1}{2} \log (1 + \sin x) \\ &\qquad + \sum_1^{\infty}{}_h \log \frac{1 - 2q^h \sin x + q^{2h}}{1 + 2q^h \sin x + q^{2h}}. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber, da $2 \sin x = -i\,(e^{ix} - e^{-ix})$ ist,

$$\log \frac{1 - 2q^h \sin x + q^{2h}}{1 + 2q^h \sin x + q^{2h}} = \log \frac{1 + iq^h\,(e^{ix} - e^{-ix}) + q^{2h}}{1 - iq^h\,(e^{ix} - e^{-ix}) + q^{2h}}$$

$$= \log \frac{(1 + iq^h e^{ix})\,(1 - iq^h e^{-ix})}{(1 - iq^h e^{ix})\,(1 + iq^h e^{-ix})} = \log \frac{1 + iq^h e^{ix}}{1 - iq^h e^{ix}} + \log \frac{1 - iq^h e^{-ix}}{1 + iq^h e^{-ix}}.$$

*) Fund. § 40. 8)

Entwickelt man jetzt die Logarithmen nach den Formeln

$$\log \frac{1 \pm z}{1 \mp z} = \pm\, 2\{z + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 + \ldots\},$$

so erhält man

$$\log \frac{1 + iq^h e^{ix}}{1 - iq^h e^{ix}} = 2i\,\{q^h e^{ix} - \tfrac{1}{3} q^{3h} e^{3ix} + \tfrac{1}{5} q^{5h} e^{5ix} - \tfrac{1}{7} q^{7h} e^{7ix} + \ldots\}$$

$$\log \frac{1 - iq^h e^{-ix}}{1 + iq^h e^{-ix}} = -\, 2i\,\{q^h e^{-ix} - \tfrac{1}{3} q^{3h} e^{-3ix} + \tfrac{1}{5} q^{5h} e^{-5ix} - \tfrac{1}{7} q^{7h} e^{-7ix} + \ldots\}$$

und folglich

$$\log \frac{1 - 2q^h \sin x + q^{2h}}{1 + 2q^h \sin x + q^{2h}} = -\, 4\{q^h \sin x - \tfrac{1}{3} q^{3h} \sin 3x + \tfrac{1}{5} q^{5h} \sin 5x - \tfrac{1}{7} q^{7h} \sin 7x + \ldots\},$$

und wenn man die Summe für h von 1 bis ∞ nimmt,

$$\sum_1^\infty{}_h \log \frac{1 - 2q^h \sin x + q^{2h}}{1 + 2q^h \sin x + q^{2h}}$$

$$= -\, 4\,\{\frac{q}{1-q} \sin x - \tfrac{1}{3} \frac{q^3}{1-q^3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \frac{q^5}{1-q^5} \sin 5x - \ldots\}.$$

Substituirt man dies in (31), so ergiebt sich

$$\log \sqrt{\frac{1 - \sin am\, u}{1 + \sin am\, u}} = \tfrac{1}{2} \log (1 - \sin x) - \tfrac{1}{2} \log (1 + \sin x)$$
$$- 4\,\{\frac{q}{1-q} \sin x - \tfrac{1}{3} \frac{q^3}{1-q^3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \frac{q^5}{1-q^5} \sin 5x - \ldots\}.$$

Diffentiirt man jetzt nach u, indem man bemerkt, dass

$$dx = \frac{\pi}{2K} du$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf (21)

$$(32)\quad \frac{1}{\sin am\,(K-u)} = \frac{\pi}{2K}\,\{\frac{1}{\cos \frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q} \cos \frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^3}{1-q^3} \cos 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^5}{1-q^5} \cos 5\frac{\pi u}{2K} - \ldots\}\ ^{*)}$$

Für $u = 0$ ergiebt sich daraus wieder die Gleichung (29). Setzt man hingegen $K - u$ statt u, so folgt

---

*) Fund. § 39. 14)

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin am\, u} = \dfrac{\pi}{2K}\left\{\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi u}{2K}} + \dfrac{4q}{1-q}\sin\dfrac{\pi u}{2K} + \dfrac{4q^3}{1-q^3}\sin 3\dfrac{\pi u}{2K}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{4q^5}{1-q^5}\sin 5\dfrac{\pi u}{2K} + \ldots\right\} \text{*)} \end{cases}$$

Aus dieser Reihe ergiebt sich die für $\sin am\, u$, wenn man $u + iK'$ für u setzt, da nach § 10

$$(34)\quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\sin am\,(u+iK')} = k \sin am\, u$$

ist. Nun ist

$$\sin\frac{\pi\,(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}\, i\left[e^{\frac{\pi\,(iu-K')}{2K}} - e^{-\frac{\pi\,(iu-K')}{2K}}\right]$$

oder, wenn man $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ und $x = \frac{\pi u}{2K}$ einführt,

$$\sin\frac{\pi\,(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}\, i\left(q^{\frac{1}{2}}\, e^{ix} - q^{-\frac{1}{2}}\, e^{-ix}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, i\, \frac{1 - q\, e^{2ix}}{\sqrt{q}\; e^{ix}},$$

$$\frac{1}{\sin\dfrac{\pi\,(u+iK')}{2K}} = -\,2i\,\frac{\sqrt{q}\; e^{ix}}{1 - q\, e^{2ix}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe nach der Formel

$$\frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + z^7 + \ldots,$$

so erhält man

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi\,(u+iK')}{2K}} = -\,2i\,\left\{\sqrt{q}\, e^{ix} + \sqrt{q^3}\, e^{3ix} + \sqrt{q^5}\, e^{5ix}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sqrt{q^7}\, e^{7ix} + \ldots\right\}. \end{cases}$$

Die übrigen Glieder der Reihe (33) sind, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, von der Form

$$\frac{4q^n}{1-q^n}\sin n\frac{\pi u}{2K}.$$

Setzt man hier auch $u + iK'$ statt u, so ist

$$\sin n\,\frac{\pi\,(u+iK')}{2K} = -\tfrac{1}{2}\, i\left\{e^{\frac{n\pi\,(iu-K')}{2K}} - e^{-\frac{n\pi\,(iu-K')}{2K}}\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\, i\,\left(q^{\frac{n}{2}}\, e^{nix} - q^{-\frac{n}{2}}\, e^{-nix}\right) = -\tfrac{1}{2}\, i\,\left(\sqrt{q^n}\; e^{nix} - \frac{1}{\sqrt{q^n}}\, e^{-nix}\right).$$

*) Fund. § 39. 18)

Demnach

$$(36)\quad \frac{4q^n}{1-q^n}\sin\frac{n\pi(u+iK')}{2K} = -2i\left\{\frac{q^n\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix} - \frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{-nix}\right\}.$$

Schreibt man aber die Reihe (35) in folgender Form

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi(u+iK')}{2K}} = -2i\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}}{(1-q)}e^{ix} + \frac{(1-q^3)\sqrt{q^3}}{1-q^3}e^{3ix} + \frac{(1-q^5)\sqrt{q^5}}{1-q^5}e^{5ix} + \ldots\right\},$$

in welcher alle Glieder von der Form

$$-2i\left\{-\frac{q^n\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix} + \frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}e^{nix}\right\}$$

sind, so sieht man, dass das erste Glied dieses Ausdrucks sich gegen das erste Glied des Ausdrucks (36) forthebt und das übrig bleibende die Form

$$-2i\frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n}(e^{nix} - e^{-nix}) = \frac{4\sqrt{q^n}}{1-q^n}\sin nx$$

annimmt. Da nun für n alle ungeraden Zahlen zu setzen sind, so erhält man mit Rücksicht auf (34) aus (33)

$$(37)\quad \begin{cases} \sin am\, u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K}\right. \\ \left. \qquad + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right\} \text{*)} \end{cases}$$

§ 57.

Ausser den vorigen Reihen wollen wir nur noch die Reihe für $\Delta\, am\, u$ ableiten. Diese geht aus der Entwickelung der Gleichung (25.b) hervor. Wegen (21.b) erhält man nämlich daraus durch die logarithmische Differentiation cotg $am\, u$, und dann, indem man $u + iK'$ für u setzt, $\Delta\, am\, u$.

Nimmt man in der Gleichung (25.b) auf beiden Seiten den Logarithmus, so erhält man

---

*) Fund. § 39. 19)

$$\log \sqrt{\frac{1-\Delta\, am\, u}{1+\Delta\, am\, u}} = \log 2\sqrt{q} + \log \sin \frac{\pi u}{2K}$$
$$+\sum_1^\infty{}_h \Big\{\log\Big(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\Big)+\log\Big(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\Big)$$
$$-\log\Big(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\Big)$$
$$-\log\Big(1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\Big)\Big\}.$$

Setzt man zur Abkürzung wieder $\frac{\pi u}{2K} = x$, so wird

$$2\cos\frac{\pi u}{2K} = e^{ix} + e^{-ix}$$

und dann

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\log \sqrt{\frac{1-\Delta\, am\, u}{1+\Delta\, am\, u}} = \log 2\sqrt{q} + \log\sin x \\ &+\sum_1^\infty{}_h \Big\{\log(1-q^{2h}e^{ix}) + \log(1-q^{2h}e^{-ix}) \\ &+\log(1+q^{2h}e^{ix}) + \log(1+q^{2h}e^{-ix}) \\ &-\log(1-q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1-q^{2h-1}e^{-ix}) \\ &-\log(1+q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1+q^{2h-1}e^{-ix})\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Entwickelt man jetzt die sämmtlichen Logarithmen in Reihen nach den Formeln

$$\log(1-z) = -(z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\ldots) = -\sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{\lambda} z^\lambda$$

$$\log(1+z) = z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\ldots = -\sum_1^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda} z^\lambda,$$

so ist

$$\log(1-q^{2h}e^{ix}) + \log(1-q^{2h}e^{-ix})$$
$$= -\sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{\lambda} q^{2\lambda h}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

$$\log(1+q^{2h}e^{ix}) + \log(1+q^{2h}e^{-ix})$$
$$= -\sum_1^\infty{}_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} q^{2\lambda h}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

$$-\log(1-q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1-q^{2h-1}e^{-ix})$$
$$= +\sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{\lambda} q^{2\lambda h-\lambda}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}),$$

$$-\log(1+q^{2h-1}e^{ix}) - \log(1+q^{2h-1}e^{-ix})$$
$$= +\sum_1^\infty {}_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} q^{2\lambda h-\lambda}(e^{\lambda ix}+e^{-\lambda ix}).$$

Addirt man diese Gleichungen, so heben sich alle Glieder, bei welchen λ ungerade Zahlen sind, auf, und alle Glieder, bei welchen λ gerade Zahlen sind, kommen doppelt vor; die übrigbleibenden geben daher, wenn man die Exponentialgrössen zugleich in Cosinus verwandelt,

$$-\frac{4}{\lambda}q^{2\lambda h}\cos\lambda x + \frac{4}{\lambda}q^{2\lambda h-\lambda}\cos\lambda x,$$

worin für λ alle geraden Zahlen von 2 an zu setzen sind. Setzt man daher $\lambda = 2n$, so sind für n alle ganzen Zahlen von 1 an zu setzen, und die Summe obiger 8 Logarithmen liefert

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{4}{2n}\left(-q^{4nh}+\frac{q^{4nh}}{q^{2n}}\right)\cos 2nx = \sum_1^\infty {}_n \frac{4}{2n}\,\frac{1-q^{2n}}{q^{2n}}\,q^{4nh}\cos 2nx,$$

wovon der Gleichung (38) gemäss die Summe in Bezug auf h von 1 bis ∞ zu nehmen ist. Da nun

$$\sum_1^\infty {}_h\, q^{4nh} = \frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}$$

ist, so erhält man, wenn man die Summation in Bezug auf h ausführt,

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{4}{2n}\,\frac{1-q^{2n}}{q^{2n}}\cdot\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}\cos 2nx = \sum_1^\infty {}_n \frac{4}{2n}\,\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos 2nx,$$

und demgemäss ist

$$\log\sqrt{\frac{1-\Delta\, am\, u}{1+\Delta\, am\, u}} = \log 2\sqrt{q} + \log\sin x + 4\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{2n}\,\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos 2nx$$
$$= \log 2\sqrt{q} + \log\sin x + 4\left\{\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^2}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1+q^4}\cos 4x\right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\,\frac{q^6}{1+q^6}\cos 6x + \ldots\right\}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach u, indem

$$dx = \frac{\pi}{2K}\,du$$

ist, so erhält man wegen (21. b)

$$\cot g\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{\cot g\, x - 4\sum_1^\infty {}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx\right\}$$

oder

$$(39)\quad \begin{cases} \cotg am\, u = \frac{\pi}{2K}\Big\{\cotg \frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K} \\ \qquad - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K}\ \ldots\Big\}. \end{cases}$$

In dieser Gleichung hat man $u + iK'$ für u zu setzen, um $\Delta\, am\, u$ zu erhalten; denn nach § 10 ist

$$\cotg am\,(u + iK') = -i\,\Delta\, am\, u.$$

Setzt man also $\frac{\pi\,(u+iK')}{2K} = x_1$ und $\frac{\pi u}{2K} = x$, so erhält man

$$(40)\qquad -i\,\Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\Big\{\cotg x_1 - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx_1\Big\}.$$

Nun ist

$$x_1 = \frac{\pi u}{2K} + \frac{\pi i K'}{2K} = \frac{\pi i K'}{2K} + x,$$

also

$$ix_1 = -\frac{\pi K'}{2K} + ix$$

$$e^{2ix_1} = q\, e^{2ix},\quad e^{-2ix_1} = \frac{1}{q}e^{-2ix},$$

folglich

$$\sin 2nx_1 = -\tfrac{1}{2}i\,(e^{2nix_1} - e^{-2nix_1}) = -\tfrac{1}{2}i\,(q^n\, e^{2nix} - \frac{1}{q^n}e^{-2nix})$$

$$-\frac{4q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx_1 = +2i\,\Big(\frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}e^{2nix} - \frac{q^n}{1+q^{2n}}e^{-2nix}\Big)$$

und

$$(41)\quad \begin{cases} -4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nx_1 \\ = +2i\sum_1^\infty{}_n \Big(\frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}e^{2nix} - \frac{q^n}{1+q^{2n}}e^{-2nix}\Big). \end{cases}$$

Ferner ist

$$\cotg x_1 = -i\frac{1+e^{2ix_1}}{1-e^{2ix_1}} = -i\frac{1+q\,e^{2ix}}{1-q\,e^{2ix}},$$

und weil

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$$

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots.,$$

also

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\,(z + z^2 + z^3 + \ldots.) = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n z^n$$

ist,

$$\cot x_1 = -i\left\{1 + 2\sum_1^{\infty}{}_n\, q^n\, e^{2nix}\right\}$$

oder auch

$$\cot x_1 = -i\left\{1 + 2\sum_1^{\infty}{}_n \frac{(1+q^{2n})\, q^n}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}\right\}$$

$$= -i\left\{1 + 2\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}\, e^{2nix} + 2\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}\right\}.$$

Addirt man nun dieses zu (41), um den Ausdruck (40) herzustellen, so hebt sich das Glied

$$2i\sum \frac{q^{3n}}{1+q^{2n}}\, e^{2nix}$$

fort, und man erhält mit Fortlassung des beiden Seiten gemeinschaftlichen Factors $-i$

$$\Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 2\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}\left(e^{2nix} + e^{-2nix}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 4\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2nx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2K}\left\{1 + 4\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{K}\right\}$$

$$(42)\quad \Delta\, am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \ldots\right\}.\text{*)}$$

Diese Reihe hat noch besondere Wichtigkeit dadurch, dass man aus ihr durch Integration eine Reihe für $am\, u$ ableiten kann. Denn da

$$\frac{d\, am\, u}{du} = \Delta\, am\, u$$

ist, so erhält man auch

$$am\, u = \int_0^u \Delta\, am\, u\, du.$$

Demnach ergiebt sich

*) Fund. § 39. 25)

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} am\,u &= \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2(1+q^4)}\sin 2\frac{\pi u}{K} \\ &\quad + \frac{2q^3}{3(1+q^6)}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \ldots \text{*)} \end{aligned} \right.$$

Diese Reihe bestätigt die im § 7 gemachten Bemerkungen über die Beschaffenheit der Function $am\,u$. Sie besteht nämlich aus einem mit u proportional wachsenden Gliede $\frac{\pi u}{2K}$, welches die durch die Puncte A, B, C, etc. hindurchgehende Gerade darstellt, und einem periodischen Theile, durch welchen bewirkt wird, dass die Curve für $am\,u$ sich wellenförmig um die erwähnte Gerade schlingt.

Fig. 2.

A B C D E 0 K 2K 3K 4K

§ 58.

Die im Vorigen ausgeführten Rechnungen mögen als Muster für die Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen dienen. Um aber die Uebersicht zu erleichtern, sollen im Folgenden sowohl der Gang der Entwickelung, als auch die wichtigsten Resultate noch einmal zusammengestellt werden.

Den Ausgangspunct bilden die Formeln (25) des § 55, nämlich

$$\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}} = \sqrt{\frac{1-\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+\sin\frac{\pi u}{2K}}}\cdot\prod_1^\infty \frac{1-2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}{1+2q^h\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2h}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos am\,u}{1+\cos am\,u}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\pi u}{4K}\prod_1^\infty \frac{\left(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\right)\left(1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\right)}{\left(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\right)\left(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1-\varDelta\,am\,u}{1+\varDelta\,am\,u}}$$

$$=2\sqrt{q}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_1^\infty \frac{\left(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\right)\left(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h}\right)}{\left(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\right)\left(1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h-2}\right)},$$

---

*) Fund. § 39. 24)

Die logarithmische Differentiation der linken Theile ergiebt nach (21)

$$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1-\sin am\,u}{1+\sin am\,u}} = -\frac{1}{\sin am\,(K-u)}$$

$$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1-\cos am\,u}{1+\cos am\,u}} = \frac{k'}{\cos am\,(K-u)}$$

$$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1-\Delta am\,u}{1+\Delta am\,u}} = \operatorname{cotg} am\,u.$$

Die im Vorigen auseinandergesetzte Behandlung führt daher zunächst auf Reihen für

$$\frac{1}{\sin am\,(K-u)},\quad \frac{1}{\cos am\,(K-u)},\quad \operatorname{cotg} am\,u.$$

Alsdann zeigt die folgende Tabelle, wie man durch Substitutionen zu Reihen für die übrigen elliptischen Functionen gelangt.

	$\frac{1}{\sin am\,(K-u)}$	$\frac{1}{\cos am\,(K-u)}$	$\operatorname{cotg} am\,u$
im Vorigen $K-u$ für u gesetzt:	$\frac{1}{\sin am\,u}$	$\frac{1}{\cos am\,u}$	$\operatorname{tg} am\,u$
im Vorigen $u+iK'$ für u gesetzt:	$\sin am\,u$	$\cos am\,(K-u)$	$\frac{1}{\Delta am\,u}$
im Vorigen $K-u$ für u gesetzt:	$\sin am\,(K-u)$	$\cos am\,u$	$\frac{1}{\Delta am\,(K-u)}$

Die Reihe für $\Delta am\,u$ folgt aus der für $\operatorname{cotg} am\,u$ durch Substitution von $u+iK'$ für u.

Die wichtigsten sich ergebenden Reihen sind folgende:

$$\sin am\,u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right\}.$$

$$\cos am\,u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right\}$$

$$\Delta am\,u = \frac{\pi}{2K}\left\{1 + \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

$$\operatorname{tg} am\, u = \frac{\pi}{2k'K}\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \dots\right\}$$

$$am\, u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{2\,(1+q^4)}\sin 2\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^3}{3\,(1+q^6)}\sin 3\frac{\pi u}{K} + \dots$$

$$\frac{1}{\sin am\, u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^5}{1-q^5}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \dots\right\}$$

$$\frac{1}{\cos am\, u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} - \frac{4q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1+q^3}\cos 3\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^5}{1+q^5}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \dots\right\}$$

$$\frac{1}{\Delta\, am\, u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{1 - \frac{4q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4}\cos 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^3}{1+q^6}\cos 3\frac{\pi u}{K} + \dots\right\}$$

$$\operatorname{cotg} am\, u = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4}\sin 2\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin 3\frac{\pi u}{K} - \dots\right\}$$

Zur Ermittelung des Werthes von q für einen gegebenen Modul k existiren bereits Tafeln; eine kleinere hat Jacobi der im 26ten Bande des Crelle'schen Journals enthaltenen Abhandlung: „Zur Theorie der elliptischen Functionen" beigefügt; eine ausgedehntere Tafel für q enthält die erste Lieferung von Meissel's Sammlung mathematischer Tafeln (Iserlohn. 1860).

Ein ausgezeichnetes Hülfsmittel zum Uebergange von einer elliptischen Function zu einer anderen bietet auch die Verwandlung von q in $-q$ dar. Da aber

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

für alle reellen Werthe von k und k' positiv bleibt, so ist ersichtlich, dass es nur für imaginäre Moduln negativ werden kann. Nun haben wir § 24 gesehen, dass die Verwandlung von k in $\frac{1}{k}$,

den Uebergang von k' in $\frac{ik'}{k}$, von K in $k\,(K \pm iK')$ und von K' in kK' nach sich zieht. Vertauscht man darin k mit k', so folgt auch, dass gleichzeitig

$$\begin{array}{lll} k & \text{in} & \frac{ik}{k'} \\ k' & ,, & \frac{1}{k'} \\ K & ,, & k'K \\ K' & ,, & k'\,(K' \pm iK) \end{array}$$

übergehen. Setzt man also $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich $-\pi\frac{K'}{K}$ in $-\pi\frac{k'\,(K' \pm iK)}{k'K} = -\pi\frac{K'}{K} \mp i\pi$, mithin

$$q \quad \text{in} \quad e^{-\pi\frac{K'}{K}}\,e^{\mp i\pi},$$

oder weil

$$e^{\mp i\pi} = -1$$

ist, in $-q$. Demnach entsteht $-q$ aus q dann, wenn k in $\frac{ik}{k'}$ übergeht. Vertauscht man nun auch in den Formeln (13) des § 24 k mit k', so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\sin am\,(k'u, \tfrac{ik}{k'}) = \frac{k' \sin am\,u}{\varDelta\,am\,u} = \cos am\,(K-u)$$

$$\cos am\,(k'u, \tfrac{ik}{k'}) = \frac{\cos am\,u}{\varDelta\,am\,u} = \sin am\,(K-u)$$

$$\varDelta\,am\,(k'u, \tfrac{ik}{k'}) = \frac{1}{\varDelta\,am\,u} = \frac{1}{k'}\,\varDelta\,am\,(K-u)$$

$$\operatorname{tg} am\,(k'u, \tfrac{ik}{k'}) = k' \operatorname{tg} am\,u = \operatorname{cotg} am\,(K-u).$$

Diese Formeln zeigen, welche elliptische Functionen durch die obigen Reihen dargestellt werden, wenn man in diesen $-q$ für q setzt. Wenn man nämlich gleichzeitig auch u in $k'u$ übergehen lässt, so bleibt der in sämmtlichen Reihen vorkommende Ausdruck $\frac{\pi u}{K}$ ungeändert, denn aus K wird $k'K$, folglich aus $\frac{\pi u}{K}$

$$\frac{\pi k' u}{k'K} = \frac{\pi u}{K}.$$

Man hat daher wirklich in den Reihen nichts anderes zu verändern, als q in $-q$ übergehen zu lassen, und nur bei dem vor

den Reihen stehenden Factor auf die Vertauschung Rücksicht zu nehmen. Auf diese Weise entsteht z. B. aus der Reihe für $\Delta\, am\, u$ sogleich die für $\frac{1}{\Delta\, am\, u}$.

Fünfzehnter Abschnitt.

Reihenentwickelung für die zweite Gattung.

---

§ 59.

Die elliptische Transcendente der zweiten Gattung, $E(u)$, war nach § 18

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2\, am\, u\, du = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2 am\, u)\, du.$$

Es kommt daher darauf an, eine Reihe für $\sin^2 am\, u$ herzustellen. Diese hat Jacobi durch Quadrirung der Reihe (37) § 56 für $\sin am\, u$ ermittelt.*) Setzt man wie früher $\frac{\pi u}{2K} = x$, so kann man die Reihe (37) schreiben

$$(1) \quad \begin{cases} \sin am\, u = \frac{4\pi\sqrt{q}}{2kK} \left\{ \frac{1}{1-q} \sin x + \frac{q}{1-q^3} \sin 3x + \frac{q^2}{1-q^5} \sin 5x \right. \\ \qquad \left. + \ldots + \frac{q^{h-1}}{1-q^{2h-1}} \sin (2h-1)\, x + \ldots \right\}. \end{cases}$$

Durch Multiplicirung dieser Reihe mit sich selbst erhält man lauter Producte von der Form $\sin mx \sin px$, wenn unter m und p ungerade Zahlen verstanden werden. Nun ist

$$\sin (y + z) \sin (y - z) = \sin^2 y - \sin^2 z,$$

also wenn man $y + z = mx$, $y - z = px$ und daher $y = \frac{m+p}{2} x$, $z = \frac{m-p}{2} x$ setzt,

$$(2) \quad . \quad . \quad \sin mx \sin px = \sin^2 \frac{m+p}{2} x - \sin^2 \frac{m-p}{2} x,$$

*) Fundam. § 41.

worin, da m und p alle möglichen ungeraden Zahlen bedeuten, $m+p$ und $m-p$ alle möglichen geraden Zahlen, $\frac{m+p}{2}$ alle möglichen ganzen Zahlen (exclusive 0), und $\frac{m-p}{2}$ auch alle möglichen ganzen Zahlen (inclusive 0) bedeuten werden. Die Quadrirung der Reihe für $\sin am\, u$ wird daher die Differenz zweier Reihen liefern, von welchen jede die Quadrate der Sinus aller Vielfachen von x enthält; also wird die Reihe für $\sin^2 am\, u$ folgende Form annehmen

$$(3)\quad \sin^2 am\, u = \left(\frac{4\pi\sqrt{q}}{2kK}\right)^2 \left\{\begin{array}{r} A_1 \sin^2 x + A_2 \sin^2 2x + A_3 \sin^2 3x \\ + \ldots + A_n \sin^2 nx + \ldots \\ -B_1 \sin^2 x - B_2 \sin^2 2x - B_3 \sin^2 3x \\ - \ldots - B_n \sin^2 nx - \ldots \end{array}\right\}$$

worin die Coefficienten A und B zu bestimmen sein werden. Um den Coefficienten A_n zu bestimmen, setzen wir $\frac{m+p}{2} = n$, sodass $p = 2n - m$, $m = 2n - p$ ist, und können dann leicht ermitteln, welche zusammengehörigen Werthe von m und p zur Bildung der Zahl n beitragen. Es wird nämlich

für $m = 1$	$p = 2n - 1$
$m = 3$	$p = 2n - 3$
$m = 5$	$p = 2n - 5$
......	....
$m = 2n - 1$	$p = 1$.

Dies zeigt, dass zur Bildung von n nur die endliche Anzahl der Werthe $1, 3, 5, \ldots\ldots 2n-1$ von m beiträgt, weil für grössere Werthe von m keine entsprechenden Werthe von p mehr vorhanden sind. Ausserdem sieht man, dass jedes Paar zusammengehöriger Werthe von m und p, z. B. $1, 2n-1$; $3, 2n-3$; etc. doppelt (das zweite Mal nur in umgekehrter Ordnung) vorkommt, mit Ausnahme desjenigen Paares, bei welchem $m = p$ ist. Da nun $\sin mx$ und $\sin px$ resp. die Coefficienten $\frac{q^{\frac{m-1}{2}}}{1-q^m}$ und $\frac{q^{\frac{p-1}{2}}}{1-q^p}$ haben, so kann man den Coefficienten A_n von $\sin nx$ aus den Coefficienten der Reihe (1) mit Berücksichtigung von (2) sogleich bilden. Nämlich man erhält

$$(4)\quad A_n = \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}} + \frac{q}{1-q^3}\,\frac{q^{n-2}}{1-q^{2n-3}} + \dots \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{1}{1-q}.$$

Setzt man zweitens zur Bildung des Coefficienten B_n

$$\frac{m-p}{2} = n,$$

so ist $m = 2n + p$, also wird

$$\begin{array}{ll} \text{für } p = 1 & m = 2n+1 \\ p = 3 & m = 2n+3 \\ p = 5 & m = 2n+5 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Hier tragen also zur Bildung der Zahl n alle Werthe von p: 1, 3, 5, 7, ... bis ins Unendliche bei. Quadrate kommen hier nicht vor, da niemals $p = m$ sein kann; die Producte sind daher alle zu verdoppeln, und man wird erhalten

$$(5)\quad \dots \left\{\begin{aligned} B_n = 2\Big\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n+1}} &+ \frac{q}{1-q^3}\cdot\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}} \\ &+ \frac{q^2}{1-q^5}\cdot\frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}} + \dots\Big\} \end{aligned}\right.$$

Der vollständige Coefficient von $\sin^2 nx$ in der Reihe (3) ist alsdann

$$A_n - B_n.$$

Um denselben auf seine einfachste Gestalt zu bringen, schreibe man die Gleichung (4) zunächst so

$$\begin{aligned} A_n = q^{n-1}\Big\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^{2n-1}} &+ \frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^{2n-3}} \\ &+ \dots \frac{1}{1-q^{2n-1}}\quad\frac{1}{1-q}\Big\}, \end{aligned}$$

und transformire jedes einzelne Glied nach der identischen Gleichung

$$\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-yz}\Big\{\frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} + 1\Big\},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} A_n = \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\Big\{\Big(\frac{q}{1-q} + \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} + 1\Big) &+ \Big(\frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^{2n-3}}{1-q^{2n-3}} + 1\Big) \\ &+ \dots \Big(\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} + \frac{q}{1-q} + 1\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

und da nun in jedem in Klammern geschlossenen Gliede die er-

sten Glieder dieselben sind, wie die zweiten Glieder, nur in umgekehrter Ordnung, und die Anzahl aller Glieder $= n$ ist,

$$(6) \quad A_n = \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{n+2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\ldots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)\right\}.$$

Zur Umformung von B_n schreibe man die Gleichung (5)

$$B_n = 2\, q^{n-1}\left\{\frac{q}{(1-q)(1-q^{2n+1})} + \frac{q^3}{(1-q^3)(1-q^{2n+3})} + \frac{q^5}{(1-q^5)(1-q^{2n+5})} + \ldots\right\}$$

und benutze die identische Gleichung

$$\frac{y}{(1-y)(1-z)} = \frac{1}{1-\frac{z}{y}}\left(\frac{y}{1-y} - \frac{z}{1-z}\right),$$

so erhält man

$$B_n = \frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \ldots + \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} + \ldots - \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} - \frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}} - \frac{q^{2n+5}}{1-q^{2n+5}} - \ldots\right\},$$

welche Reihe zeigt, dass von dem Gliede $\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$ an alle Glieder sich zerstören, sodass sie eine endliche Reihe wird, nämlich

$$B_n = \frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \ldots + \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

Subtrahirt man nun dies von (6), so ergiebt sich schliesslich

$$A_n - B_n = \frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}.$$

Nun ist nach (3)

$$\sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 16\, q \sum_1^\infty{}_n (A_n - B_n)\sin^2 nx,$$

also erhält man

$$\sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 16 \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2\frac{n\pi u}{2K}$$

$$= 16\left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin^2\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\sin^2\frac{2\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\sin^2\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right\}.$$

Darin kann man noch statt der Quadrate der Sinus die Cosinus einführen, indem

$$\sin^2 nx = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

ist; dann erhält man

$$\sin^2 am\, u = 8 \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cdot \left(1 - \cos\frac{n\pi u}{K}\right)$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(7) \qquad C = 8 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = 8 \left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\ldots\right\}$$

setzt,

$$(8) \quad \sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{C - 8 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K}\right\}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{C - 8 \left[\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right]\right\}.$$

Anmerk. Aus $\sin^2 am\, u$ erhält man auch eine Reihe für $\frac{1}{\sin^2 am\, u}$, wenn man $\log \sin am\, u$ zweimal nach u differentiirt, denn man hat

$$\frac{d^2 \log \sin am\, u}{du^2} = k^2 \sin^2 am\, u - \frac{1}{\sin^2 am\, u},$$

also

$$\frac{1}{\sin^2 am\, u} = k^2 \sin^2 am\, u - \frac{d^2 \log \sin am\, u}{du^2}.$$

Man braucht also nur die Reihe für $\log \sin am\, u$ zweimal nach u zu differentiiren und von der Reihe (8) abzuziehen, um eine Reihe für $\frac{1}{\sin^2 am\, u}$ zu erhalten. (Vgl. Fundamenta § 42.)]

§ 60.

Vermittelst der Reihe (8) erhält man nun sofort eine Reihe für $E(u)$; denn zunächst wird

$$\Delta^2 am\, u = 1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \left\{C - 8 \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K}\right\}$$

und daraus ergiebt sich durch Integration

(9) $$E(u) = [1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C]\, u + \frac{4\pi}{2K} \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K}.$$

Setzt man darin zunächst $u = K$, so erhält man auch eine Reihe für das vollständige Integral der zweiten Gattung $E(K)$ oder E. Es verschwindet nämlich der unter dem Zeichen Σ stehende Ausdruck, und man erhält,

(10) . . . . $$E = [1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C]\, K,$$

oder wenn man für C seine Reihe (7) substituirt,

(11) $$E = K - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 8\, K \left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right\}.$$

Hiedurch ist ein Mittel gegeben, E aus k mit Hülfe von q und K zu berechnen.

Nimmt man nun E als bekannt an, so kann man auch C durch E ersetzen, denn da aus (10) folgt

$$1 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 C = \frac{E}{K},$$

so erhält man aus (9)

(12) . . $$E(u) = \frac{E}{K}\, u + \frac{4\pi}{2K} \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K}.$$

Den periodischen Theil dieses Ausdrucks hat Jacobi*) als eine neue Function eingeführt und mit Z bezeichnet, indem er setzte

(13) $$Z(u) = \frac{4\pi}{2K} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K}$$

$$= \frac{4\pi}{2K} \left\{\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin \frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\},$$

welche die Stelle der Transcendenten $E(u)$ vertritt und mit ihr, wie aus (12) folgt, durch die Relation

(14) . . . . . . $$E(u) = \frac{E}{K}\, u + Z(u)$$

verbunden ist. Man bemerke zugleich die Formeln

*) Fundamenta. § 47.

$$Z(o) = o;\ Z(K) = o.$$
$$Z(u + 2K) = Z(u)$$
$$Z(-u) = -Z(u).$$

Führt man auch in (8) die Grösse E statt C ein, indem aus (10)

$$C = \left(1 - \frac{E}{K}\right)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{4K}{\pi^2}(K - E)$$

folgt, so erhält man

$$(15)\quad \sin^2 am\, u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2 \left\{\frac{4K}{\pi^2}(K-E) - 8\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K}\right\}.$$

Sechszehnter Abschnitt.

Reihenentwickelung für die dritte Gattung.

§ 61.

Die elliptische Transcendente der dritten Gattung ist nach Jacobi's Bezeichnung (§ 20)

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}.$$

Durch zweimalige Differentiation derselben nach u wird man auf schon früher in Reihen entwickelte Ausdrücke geführt. Man hat nämlich

$$(16)\quad \frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u},$$

und wenn man noch einmal differentiirt,

$$\frac{d^2\,\Pi(u,a)}{du^2} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a}{(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u)^2}$$
$$.\ \{(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u)\, 2 \sin am\, u \cos am\, u\, \Delta\, am\, u$$
$$+ 2k^2 \sin^2 am\, a \sin^3 am\, u \cos am\, u\, \Delta\, am\, u\}$$
$$= 2k^2 \frac{\sin am\, a \cos am\, u\, \Delta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} \cdot \frac{\sin am\, u \cos am\, a\, \Delta\, am\, a}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}.$$

und daher erhält man nach den Formeln 4) und 5) des § 29

$$(17) \quad \frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \tfrac{1}{2}k^2 \left\{\sin am(u+a) - \sin am(u-a)\right\}$$
$$. \left\{\sin am(u+a) + \sin am(u-a)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}k^2 \left\{\sin^2 am(u+a) - \sin^2 am(u-a)\right\},$$

auf welchen Ausdruck man sogleich die Reihe (15) anwenden kann, indem man darin einmal $u+a$ und dann $u-a$ statt u setzt, beide Ausdrücke von einander abzieht und mit $\frac{1}{2}k^2$ multiplicirt. Dadurch ergiebt sich:

$$\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 4 \sum_1^{\infty}{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left(\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right).$$

Integrirt man jetzt zwischen den Grenzen o und u, weil, wie aus (16) hervorgeht, $\frac{d\,\Pi(u,a)}{du}$ für $u=o$ verschwindet, so erhält man:

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = \frac{\pi}{2K} 2 \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left(\sin\frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin\frac{n\pi(u+a)}{K}\right)$$
$$+ \frac{\pi}{2K} 4 \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi a}{K},$$

und wenn man nochmals, wiederum zwischen den Grenzen o und u, integrirt,

$$\Pi(u,a) = \frac{4\pi}{2K} u \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi a}{K}$$
$$- \sum \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \left(\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right)$$
$$= \frac{4\pi}{2K} u \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi a}{K}$$
$$- 2 \sum \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \sin\frac{n\pi u}{K} \sin\frac{n\pi a}{K}.$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied nach der durch die Gleichung (13) gegebenen Definition der Function Z nichts anderes als $u\,Z(a)$, folglich hat man auch

(18) $$\begin{cases} \Pi(u,a) = u\,Z(a) - \sum\limits_1^{\infty}{}_n \dfrac{q^n}{n(1-q^{2n})}\left(\cos\dfrac{n\pi(u-a)}{K}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left. - \cos\dfrac{n\pi(u+a)}{K}\right) \\ \qquad = u\,Z(a) - 2\sum\limits_1^{\infty}{}_n \dfrac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin\dfrac{n\pi u}{K}\sin\dfrac{n\pi a}{K}. \end{cases}$$

Der vorige Ausdruck (18) lässt eine wichtige Umwandlung zu, mittelst welcher $\Pi(u,a)$ durch den Logarithmus eines unendlichen Products ausgedrückt werden kann.

Es ist nämlich

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + \ldots\ldots,$$

also

$$\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \frac{q^n}{n}\cos nx + \frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \frac{q^{5n}}{n}\cos nx + \ldots$$

(19) $$\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \sum \frac{q^n}{n}\cos nx + \sum\frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \sum\frac{q^{5n}}{n}\cos nx + \ldots.$$

Hierin kann man nun jedes einzelne Glied summiren. Bezeichnet nämlich λ eine ungerade Zahl, so hat jedes Glied der vorigen Reihe die Form

$$\sum\frac{q^{\lambda n}}{n}\cos nx.$$

Setzt man aber

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}(e^{nix} + e^{-nix}),$$

so ist

$$\sum\frac{q^{\lambda n}}{n}\cos nx = \tfrac{1}{2}\sum\frac{q^{\lambda n}}{n}e^{nix} + \tfrac{1}{2}\sum\frac{q^{\lambda n}}{n}e^{-nix}$$

oder, weil

$$z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \ldots = \sum\frac{1}{n}z^n = -\log(1-z)$$

ist,

$$\sum \frac{q^{\lambda n}}{n} \cos nx = -\tfrac{1}{2}\log(1-q^{\lambda}e^{ix}) - \tfrac{1}{2}\log(1-q^{\lambda}e^{-ix})$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log[(1-q^{\lambda}e^{ix})(1-q^{\lambda}e^{-ix})]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log(1-q^{\lambda}(e^{ix}+e^{-ix})+q^{2\lambda})$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log(1-2q^{\lambda}\cos x+q^{2\lambda}).$$

Setzt man nun für λ nach und nach alle ungeraden Zahlen, so erhält man aus (19)

$$\sum_1^{\infty}{}_n \frac{q^{n}}{n(1-q^{2n})}\cos nx = -\tfrac{1}{2}\log(1-2q\cos x+q^2)$$
$$-\tfrac{1}{2}\log(1-2q^3\cos x+q^6)$$
$$-\tfrac{1}{2}\log(1-2q^5\cos x+q^{10}) - \ldots\ldots$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_h \log(1-2q^{2h-1}\cos x+q^{4h-2})$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log\prod_1^{\infty}{}_h(1-2q^{2h-1}\cos x+q^{4h-2})$$

Schreibt man also nun für x einmal $\frac{\pi(u-a)}{K}$ und dann $\frac{\pi(u+a)}{K}$, so ergiebt sich aus (18)

$$(20)\quad \Pi(u,a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\prod_1^{\infty}{}_h \frac{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K}+q^{4h-2}},$$

wobei bemerkt zu werden verdient, dass Zähler und Nenner dieses unendlichen Products dieselben Functionen von resp. $u-a$ und $u+a$ sind, wie die Function von u, welche den gemeinschaftlichen Nenner der in unendliche Producte entwickelten Functionen sin *am u*, cos *am u*, Δ *am u* bildet. (18) § 54.

Siebzehnter Abschnitt.

Die Jacobi'sche Function.

§ 62.

Wir sind nun an dem Puncte angekommen, wo wir diejenige Function einführen können, welche man nach Jacobi allgemein mit dem Buchstaben Θ bezeichnet, und die wir, weil die Einführung dieser Function, durch welche sich sämmtliche elliptische Functionen ausdrücken lassen, zu den wichtigsten Leistungen Jacobi's im Gebiete der elliptischen Functionen gehört, nach Dirichlet's Vorschlage die Jacobi'sche Function nennen wollen.*)

Wir betrachten, um zu derselben zu gelangen, das Product

$$\prod_{1}^{\infty}{}^{h} \left(1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right),$$

welches sowohl den gemeinschaftlichen Nenner der Producte für $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta\, am\, u$ bildet, als auch mit den Argumenten $u - a$ und $u + a$ in dem Ausdrucke (20) für $\Pi(u, a)$ vorkommt. Wir bezeichnen dasselbe vorläufig mit $F(u)$, setzen daher

---

*) In der Gedächtnissrede auf Jacobi (Crelle's Journ. Bd. 52) sagt Dirichlet: Bedenkt man, dass die neue Function jetzt das ganze Gebiet der elliptischen Transcendenten beherrscht, dass Jacobi aus ihren Eigenschaften wichtige Theoreme der höheren Arithmetik abgeleitet hat, und dass sie eine wesentliche Rolle in vielen Anwendungen spielt, von welchen hier nur die vermittelst dieser Transcendente gegebene Darstellung der Rotationsbewegung erwähnt werden mag, welche eine von Jacobi's letzten und schönsten Arbeiten ist, so wird man dieser Function die nächste Stelle nach den längst in die Wissenschaft aufgenommenen Elementartranscendenten einräumen müssen. Auffallender Weise hat eine so wichtige Function noch keinen anderen Namen, als den der Transcendente Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei Jacobi erscheint; und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr Jacobi's Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transcendente zuerst erkannt zu haben.

$$F(u) = \prod_1^\infty{}_h \left(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right)$$

und wollen es in eine nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{\pi u}{K}$ fortgehende Reihe entwickeln. Zu dem Ende suchen wir zuerst eine Relation zwischen $F(u + 2iK')$ und $F(u)$ auf. Setzt man

$$\frac{\pi u}{2K} = x,$$

so ist

$$2\cos\frac{\pi u}{K} = (e^{2ix} + e^{-2ix}),$$

also

$$1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2} = (1 - q^{2h-1}e^{2ix})(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}),$$

folglich hat man

$$(1)\qquad \begin{cases} F(u) = (1 - q\,e^{2ix})(1 - q^3e^{2ix})(1 - q^5e^{2ix})\ldots\ldots \\ \qquad\qquad (1 - q\,e^{-2ix})(1 - q^3e^{-2ix})(1 - q^5e^{-2ix})\ldots\ldots \end{cases}$$

Setzt man nun $u + 2iK'$ statt u, so wird

$$x_1 = \frac{\pi(u + 2iK')}{2K} = x + \frac{\pi iK'}{K}$$

$$2ix_1 = 2ix - \frac{2\pi K'}{K},$$

folglich

$$e^{2ix_1} = q^2e^{2ix}, \qquad e^{-2ix_1} = \frac{1}{q^2}\,e^{-2ix}.$$

Demnach wird

$$F(u + 2iK') = (1 - q^3e^{2ix})(1 - q^5e^{2ix})(1 - q^7e^{2ix})\ldots\ldots$$
$$(1 - \frac{1}{q}e^{-2ix})(1 - q\,e^{-2ix})(1 - q^3e^{-2ix})\ldots\ldots$$

Es ist aber

$$1 - \frac{1}{q}e^{-2ix} = -\frac{1}{q}e^{-2ix}\,(1 - q\,e^{2ix}),$$

folglich hat man auch:

$$F(u + 2iK') = -\frac{1}{q}\,e^{-2ix}\,(1 - q\,e^{2ix})(1 - q^3e^{2ix})(1 - q^5e^{2ix})\ldots.$$
$$(1 - q\,e^{-2ix})(1 - q^3e^{-2ix})(1 - q^5e^{-2ix})\ldots,$$

und daraus ergiebt sich durch Vergleichung mit (1)

$$F(u+2iK') = -\frac{1}{q}e^{-2ix}.F(u)$$

oder

$$(2) \quad . \quad . \quad F(u+2iK') = -\frac{1}{q}e^{-\frac{\pi i u}{K}}F(u).$$

Nun setzen wir*)

$$F(u) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{K} + A_2\cos\frac{2\pi u}{K} + A_3\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\ldots$$

und wollen vermittelst der eben gefundenen Relation (2) die unbestimmten Coefficienten A bestimmen. Setzt man wieder wie vorhin

$$\cos\frac{\pi u}{K} = \tfrac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}),$$

so ist

$$(3) \quad F(u) = A_0 + \tfrac{1}{2}A_1 e^{2ix} + \tfrac{1}{2}A_2 e^{4ix} + \tfrac{1}{2}A_3 e^{6ix} + \ldots\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}A_1 e^{-2ix} + \tfrac{1}{2}A_2 e^{-4ix} + \tfrac{1}{2}A_3 e^{-6ix} + \ldots\ldots$$

Daraus folgt

$$(4) \quad -\frac{1}{q}e^{-2ix}F(u) = -\frac{A_0}{q}e^{-2ix} - \frac{A_1}{2q} - \frac{A_2}{2q}e^{2ix}$$
$$-\frac{A_3}{2q}e^{4ix} - \ldots\ldots$$
$$-\frac{A_1}{2q}e^{-4ix} - \frac{A_2}{2q}e^{-6ix} - \frac{A_3}{2q}e^{-8ix} - \ldots\ldots$$

Setzen wir ferner in (3) $u + 2iK'$ statt u, so geht, wie wir gesehen haben, e^{2ix} in q^2e^{2ix} und e^{-2ix} in $\frac{1}{q^2}e^{-2ix}$ über, folglich ist

$$F(u+2iK') = A_0 + \frac{A_1q^2}{2}e^{2ix} + \frac{A_2q^4}{2}e^{4ix} + \frac{A_3q^6}{2}e^{6ix} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A_1}{2q^2}e^{-2ix} + \frac{A_2}{2q^4}e^{-4ix} + \frac{A_3}{2q^6}e^{-6ix} + \ldots\ldots$$

Da nun diese Reihe der Reihe (4) gleich sein muss, so erhält man:

$$-\frac{A_1}{2q} = A_0 \qquad A_1 = -2q\,A_0$$

$$-\frac{A_2}{2q} = \frac{A_1q^2}{2} \qquad A_2 = +2q^4 A_0$$

---

*) Jacobi. Fundamenta § 62 ff.

$$-\frac{A_3}{2q} = \frac{A_2 q^4}{2} \qquad A_3 = -\ 2q^9 A_0$$

$$-\frac{A_4}{2q} = \frac{A_3 q^6}{2} \qquad A_4 = +\ 2q^{16} A_0$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

und demnach

$$(5) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}_h \left(1 - 2q^{2h-1} \cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = A_0 \left(1 - 2q \cos\frac{\pi u}{K}\right.$$
$$\left. + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K} + 2q^{16} \cos\frac{4\pi u}{K} - \ldots\right).$$

Die in A_0 multiplicirte Reihe ist es nun, welche Jacobi als eine neue Function eingeführt und mit $\Theta(u)$ bezeichnet hat, sodass die **Jacobi'sche Function** durch die folgende Gleichung definirt ist:

$$(6) \qquad \Theta(u) = 1 - 2q \cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K}$$
$$+ 2q^{16} \cos\frac{4\pi u}{K} - \ldots$$

Darin sind die Exponenten von q die Quadrate der natürlichen Zahlen, und daher gehört diese Reihe zu den am stärksten convergirenden Reihen, die es in der Mathematik überhaupt giebt.

Die Jacobi'sche Function ist periodisch, denn sie bleibt unverändert, wenn man $u + 2K$ statt u setzt, oder es ist

$$\Theta(u + 2K) = \Theta(u).$$

Sie ist aber nur einfach periodisch; wenn man das Argument u um $2iK'$ vermehrt, so bleibt Θ nicht unverändert, vielmehr erhält man aus (2), da

$$F(u) = A_0 \Theta(u)$$

ist,

$$(7) \quad . \quad . \quad \Theta(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} \Theta(u).$$

Für specielle Werthe erhält man aus (6)

$$(8) \qquad \begin{cases} \Theta(o) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots. \\ \Theta(K) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots. \\ \Theta\left(\frac{K}{2}\right) = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} - \ldots. \end{cases}$$

Wir schreiten nun zunächst zur Bestimmung des von u unabhängigen Coefficienten A_0. Da derselbe jedenfalls von q abhängen wird, so setzen wir $A_0 = \varphi(q)$ und haben dann

$$\prod_1^\infty {}^h (1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}) = \varphi(q)\, \Theta(u). \tag{9}$$

Setzt man darin $u = o$ und $u = \frac{K}{2}$, so erhält man

$$\prod_1^\infty {}^h (1 - q^{2h-1})^2 = \varphi(q)\, \Theta(o)$$

$$\prod_1^\infty {}^h (1 + q^{4h-2}) = \varphi(q)\, \Theta\left(\frac{K}{2}\right).$$

Nun zeigen aber die Gleichungen (8), dass $\Theta(o)$ in $\Theta\left(\frac{K}{2}\right)$ übergeht, wenn man darin q^4 statt q setzt. Daher hat man auch die Gleichung:

$$\prod_1^\infty {}^h (1 - q^{8h-4})^2 = \varphi(q^4)\, \Theta\left(\frac{K}{2}\right),$$

und folglich

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty {}^h \frac{1 + q^{4h-2}}{(1 - q^{8h-4})^2}$$

$$= \prod_1^\infty {}^h \frac{1}{(1 - q^{8h-4})\,(1 - q^{4h-2})}.$$

Nun repräsentiren $4h-2$ und $8h-4$ resp. die Zahlen:

$4h-2$ .... 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, ...

$8h-4$ .... 4, 12, 20, 28, 36, ...

Fügt man diesen noch die Zahlen von der Form $8h$ hinzu,

$8h$ .... 8, 16, 24, 32, ...

so erhellt, dass die drei Formen $4h-2$, $8h-4$, $8h$ zusammengenommen alle geraden Zahlen enthalten. Multiplicirt man also den vorstehenden Bruch im Zähler und Nenner mit $1 - q^{8h}$, so wird man im Nenner lauter Factoren von der Form $1 - q^{2h}$ haben und erhält somit

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty {}^h \frac{1-q^{8h}}{1-q^{2h}}.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung aufs neue q^4 statt q, und fährt damit fort, so erhält man successive

$$\frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^{16})} = \prod_1^\infty {}^h \frac{1-q^{32h}}{1-q^{8h}}$$

$$\frac{\varphi(q^{16})}{\varphi(q^{64})} = \prod_1^\infty {}^h \frac{1-q^{128h}}{1-q^{32h}}$$

$$\frac{\varphi(q^{64})}{\varphi(q^{256})} = \prod_1^\infty {}^h \frac{1-q^{512h}}{1-q^{128h}}$$

. . . .

Nun convergirt q^n mit wachsendem n zur Grenze Null, folglich $1-q^n$ zur Grenze 1. Ausserdem ist auch, wie aus (5) hervorgeht, $\varphi(o) = 1$. Setzt man daher obige Gleichungen bis ins Unendliche fort und multiplicirt sie sämmtlich, so erhält man

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty {}^h \frac{1}{1-q^{2h}}.$$

Demnach ist nun vollständig

$$(10)\quad \prod_1^\infty {}^h \left(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = \frac{\Theta(u)}{\prod\limits_1^\infty {}^h (1-q^{2h})}.$$

Setzt man darin $u = o$ und $u = K$, so erhält man die Werthe von $\Theta(o)$, $\Theta(K)$ auch durch unendliche Producte ausgedrückt. Nämlich zuerst ist

$$\Theta(o) = \prod (1-q^{2h-1})^2 (1-q^{2h}) = \prod (1-q^{2h-1})(1-q^h),$$

oder weil

$$1-q^h = \frac{1-q^{2h}}{1+q^h}$$

ist,

$$\Theta(o) = \prod \frac{(1-q^{2h-1})(1-q^{2h})}{1+q^h},$$

das heisst

$$\Theta(o) = \prod_1^\infty{}^h \frac{1-q^h}{1+q^h}.$$

Man erhält ferner:

$$\Theta(K) = \prod (1+q^{2h-1})^2 (1-q^{2h})$$

$$= \prod (1+q^{2h-1})(1+q^{2h-1})(1-q^{2h});$$

setzt man darin

$$1+q^{2h-1} = \frac{1-q^{4h-2}}{1-q^{2h-1}},$$

so kommt

$$\Theta(K) = \prod \frac{(1-q^{4h-2})(1+q^{2h-1})(1-q^{2h})}{1-q^{2h-1}}.$$

Nun ist aber

$$\prod (1+z^h) = \prod \frac{1-z^{2h}}{1-z^h} = \prod \frac{1-z^{2h}}{(1-z^{2h})(1-z^{2h-1})}$$

$$= \prod \frac{1}{1-z^{2h-1}},$$

also auch

$$\prod (1-z^{2h-1}) = \prod \frac{1}{1+z^h},$$

und wenn man $z = q^2$ annimmt,

$$\prod (1-q^{4h-2}) = \prod \frac{1}{1+q^{2h}};$$

daher erhält man

$$(11) \quad . \quad . \quad \Theta(K) = \prod_1^\infty{}^h \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} \cdot \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}.$$

Diese für $\Theta(o)$ und $\Theta(K)$ sich ergebenden unendlichen Producte haben wir aber § 54 (15) geschlossenen Ausdrücken gleich gefunden, nämlich

$$\prod \frac{1-q^h}{1+q^h} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad \prod \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} \cdot \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

folglich ist nun, wenn man zugleich die Formeln (8) berücksichtigt,

$$(12) \quad \begin{cases} \Theta(o) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots \\ \Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots \end{cases}$$

§ 63.

Ehe wir zur Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function übergehen, wollen wir an einem Beispiele auf den Zusammenhang dieser Function mit der Zahlentheorie aufmerksam machen. Dieser Zusammenhang entsteht dadurch, dass man vermittelst der Jacobi'schen Function zwei ganz von einander verschiedene Reihenentwickelungen einer und derselben Grösse erhalten kann, und zwar Reihen, die auch nach den Potenzen einer und derselben Grösse fortschreiten. Dadurch ergeben sich Beziehungen zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche die Exponenten der einen Reihe, und denjenigen ganzen Zahlen, die die Exponenten der anderen Reihe bilden. Diese Betrachtungsweise ist derjenigen analog, welche Euler in dem Abschnitte: „*De partitione numerorum*" der „*Introductio in analysin infinitorum*" anwandte, um durch Vergleichung der Exponenten einer Reihe mit den Coefficienten derselben Sätze der höheren Arithmetik abzuleiten, eine Betrachtungsweise, die auch bei den aus der Theorie der elliptischen Functionen hervorgehenden Reihen anwendbar ist.

Die Reihen, welche wir hier im Auge haben, sind hauptsächlich die im § 40 der Fundamente gegebenen, von denen zwei, nämlich die für $\frac{2K}{\pi}$ und für $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$ im § 55 als Muster abgeleitet worden sind. Wir wollen nun die letzte derselben benutzen, um durch Vergleichung mit der Reihe (12) für $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ den Satz zu beweisen, dass jede ganze Zahl die Summe von vier Quadraten ist. Da nämlich die Reihe (12)

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots.$$

die Quadrate der natürlichen Zahlen zu Exponenten hat, so wird die vierte Potenz dieser Reihe aus lauter Gliedern bestehen, bei denen jeder Exponent die Summe von vier Quadratzahlen ist. Wenn man nun zeigen kann, dass die § 55 (30) abgeleitete Reihe

$$(13) \quad \ldots \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1+8\left[\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1+q^4}+\ldots\right]$$

alle ganzen Zahlen als Exponenten enthält, so folgt der zu beweisende Satz von selbst. Man muss also die in der vorstehenden Reihe enthaltenen Brüche in ihre Reihen auflösen und in der dann entstehenden Reihe das Gesetz der Fortschreitung ermitteln. Dies hat Jacobi in § 40 der Fundamente mit allen dort vorkommenden Reihen gethan; die Ausführung der Entwickelung bei vorstehender Reihe mag wieder als Muster und zur Erläuterung der dort vorkommenden Betrachtungen dienen.

Entwickelt man in (13) alle Brüche in Reihen, so erhält man

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\left\{\begin{array}{l} q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + \ldots \\ \quad + 2q^2 \quad - 2q^4 \quad + 2q^6 \quad - 2q^8 \quad + \ldots \\ \qquad + 3q^3 \qquad + 3q^6 \qquad + 3q^9 + \ldots \\ \qquad\quad + 4q^4 \qquad\qquad - 4q^8 \quad + \ldots \\ \qquad\qquad + 5q^5 \qquad\qquad\quad + \ldots \\ \qquad\qquad\quad + 6q^6 \qquad\qquad - \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + 7q^7 \qquad\quad + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 8q^8 \quad - \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 9q^9 + \ldots \end{array}\right\}$$

$$(14) = 1 + 8\,[q + 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + 3q^8 + 13q^9 + \ldots].$$

Es entsteht also eine Reihe, welche höchst wahrscheinlich sämmtliche Potenzen von q enthält. Da es aber der Fall sein könnte, dass vielleicht bei irgend einer späteren Potenz sich die Coefficienten aufheben, sodass eine oder die andere Potenz doch in der Reihe fehlen könnte, so müssen wir das Gesetz der Reihe auf-

suchen, weil zum Beweise unseres Satzes alles darauf ankommt, nachzuweisen, dass in der Reihe (14) alle ganzen Zahlen als Exponenten vorkommen.

Bezeichnet A_n den Coefficienten der Potenz q^n, so ist

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\sum_1^\infty {}^n A_n q^n.$$

Ist nun zuerst n eine ungerade Zahl, so tragen nur die Glieder von der Form $\frac{pq^p}{1-q^p}$, in denen p ebenfalls eine ungerade Zahl ist, zur Bildung des Coefficienten A_n bei. Es ist aber

$$\frac{pq^p}{1-q^p} = pq^p + pq^{2p} + pq^{3p} + pq^{4p} + \ldots$$

Soll daher eine der in dieser Reihe vorkommenden Potenzen gleich q^n sein, so muss n ein Vielfaches von p, oder p ein Divisor der Zahl n sein. Es werden daher nur diejenigen Glieder von der Form $\frac{pq^p}{1-q^p}$ zur Bildung von $A_n q^n$ beitragen, bei welchen die Zahl p ein Divisor der Zahl n ist, und zwar wird jede solche Zahl p ein und nur ein Glied von der Form $pq^{\lambda p}$ liefern, nämlich dasjenige, für welches $\lambda p = n$ ist. Der Coefficient A_n ist daher die Summe aller derjenigen Zahlen p, welche Divisoren von n sind (1 und n selbst mitgerechnet). Bezeichnet man also mit $\varphi(n)$ die Summe der Divisoren von n, so ist

$$A_n = \varphi(n).$$

Ist zweitens n eine gerade Zahl, und zwar von der Form $2^\lambda p$, wo p wiederum eine ungerade Zahl bezeichne, so können sowohl Glieder von der Form $\frac{mq^m}{1-q^m}$ auch als Glieder von der Form $\frac{2mq^{2m}}{1+q^{2m}}$ (wo m ungerade) zur Bildung von $q^{2^\lambda p}$ beitragen. Nun ist aber

$$\frac{mq^m}{1-q^m} = \sum_1^\infty {}^h m q^{hm}$$

$$\frac{2mq^{2m}}{1+q^{2m}} = -\sum_1^\infty {}^h (-1)^h 2m q^{2hm}.$$

Es muss daher in dem einen Falle m so beschaffen sein, dass $h\,m = 2^\lambda p$, und in dem anderen Falle so, dass $2\,h\,m = 2^\lambda p$ werden kann, was in beiden Fällen nicht anders möglich ist, als wenn m ein Divisor von p ist, weil m und 2^λ relative Primzahlen sind. Für jeden Divisor m der Zahl p aber wird es eine Reihe von Gliedern geben, welche entwickelt die Potenz $q^{2^\lambda p}$ enthalten, nämlich nicht bloss die beiden oben angeschriebenen Glieder, sondern auch alle Glieder von der Form

$$\frac{2^\mu m\, q^{2^\mu m}}{1 + q^{2^\mu m}},$$

in welchen μ den Exponenten λ nicht übersteigt. Denn setzt man zur Abkürzung $\frac{p}{m} = \alpha$, sodass $n = 2^\lambda \alpha\, m$ ist, so ist, weil man auch schreiben kann:

$$n = 2^\lambda \alpha\, m = 2^{\lambda-1} \alpha\, 2m = 2^{\lambda-2} \alpha\, 4m \ldots = 2\alpha\, 2^{\lambda-1} m = \alpha\, 2^\lambda m,$$

$$\frac{m\,q^m}{1-q^m} = m\,q^m + m\,q^{2m} + m\,q^{3m} \ldots\ldots + m\,q^{2^\lambda \alpha m} + \ldots$$

$$\frac{2\,m\,q^{2m}}{1+q^{2m}} = 2m\,q^{2m} - 2m\,q^{4m} + 2m\,q^{6m} \ldots\ldots - 2m\,q^{2^{\lambda-1}\alpha\, 2m} + \ldots$$

$$\frac{4\,m\,q^{4m}}{1+q^{4m}} = 4m\,q^{4m} - 4m\,q^{8m} + 4m\,q^{12m} \ldots\ldots - 4m\,q^{2^{\lambda-2}\alpha\, 4m} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{2^{\lambda-1} m\, q^{2^{\lambda-1} m}}{1+q^{2^{\lambda-1} m}} = 2^{\lambda-1} m\,q^{2^{\lambda-1} m} - 2^{\lambda-1} m\,q^{2.2^{\lambda-1} m} \ldots - 2^{\lambda-1} m\,q^{2\,\alpha\, 2^{\lambda-1} m} + \ldots$$

$$\frac{2^\lambda m\, q^{2^\lambda m}}{1+q^{2^\lambda m}} = 2^\lambda m\, q^{2^\lambda m} - 2^\lambda m\, q^{2.2^\lambda m} \ldots\ldots + 2^\lambda m\, q^{\alpha\, 2^\lambda m} - \ldots$$

In der ersten Reihe haben alle Glieder das + Zeichen, in den folgenden erhält die Potenz q^n d. h. $q^{2^\lambda \alpha m}$ das Minuszeichen, weil die Zahlen $2^{\lambda-1}\alpha$, $2^{\lambda-2}\alpha$, ... 2α alle gerade Zahlen, also n ein gerades Vielfaches von resp. $2m$, $4m$, $8m$, . . $2^{\lambda-1} m$ ist. In der letzten Reihe dagegen hat das betreffende Glied das + Zeichen, weil α eine ungerade Zahl ist, also n ein ungera-

des Vielfaches von $2^\lambda m$. Der Antheil, den ein Factor m von p zur Bildung des Coefficienten A_n liefert, ist hienach

$$m - 2m - 4m - 8m \ldots\ldots - 2^{\lambda-1}m + 2^\lambda m$$
$$= m(1 - 2 - 4 - 8 \ldots\ldots\ldots - 2^{\lambda-1} + 2^\lambda).$$

Nun ist aber

$$1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots + 2^{\lambda-1} = 2^\lambda - 1,$$

also

$$1 - 2 - 4 - 8 \ldots - 2^{\lambda-1} + 2^\lambda = 1 - 2^\lambda + 2 + 2^\lambda = 3.$$

Demnach ist der Antheil, den der Divisor m von p zur Bildung von A_n beiträgt, gleich $3m$. Nun tragen alle Divisoren m dazu bei, und nur diese; folglich ist, wenn $\varphi(p)$ die Summe der Divisoren von p bedeutet

$$A_n = 3\varphi(p), \text{ wenn } n = 2^\lambda p.$$

Dadurch ist der Coefficient A_n für alle Fälle vollständig bestimmt, und da man alle geraden Zahlen erhält, wenn man die Formen $2(2n-1)$, $4(2n-1)$, $8(2n-1)$, $16(2n-1)$ u. s. w. für alle ganzzahligen Werthe von n von 1 bis ∞ bildet, so kann man die Reihe (14) so schreiben:

$$(15) \ldots\ldots \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1$$
$$+ 8\,\varphi(2n-1)\sum_1^\infty{}^n(q^{2n-1} + 3q^{2(2n-1)} + 3q^{4(2n-1)} + 3q^{8(2n-1)} + \ldots).$$

Hieraus erhellt nun, dass wirklich bei keiner Potenz der vorliegenden Reihe der Coefficient verschwindet, sondern dass diese Reihe **alle** ganzen Potenzen von q enthält. Nun folgt andrerseits aus (12)

$$(16) \ldots \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots\ldots]^4.$$

Demnach ist die vierte Potenz einer Reihe, deren Exponenten die Quadrate aller Zahlen sind, gleich einer Reihe, die alle Zahlen als Exponenten enthält. Erhebt man aber die erstere Reihe auf die vierte Potenz, so entsteht eine Reihe, in welcher jedes Glied das Product aus vier Gliedern der Reihe (16) ist, also die Form

$$q^{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$$

hat, wobei α, β, γ, δ irgend vier gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten. Jedes Glied der Reihe (15) muss also einem Gliede von voriger Form gleich sein; bedeutet also h irgend eine ganze Zahl, so ist

$$h = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Achtzehnter Abschnitt.

Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function.

---

§ 64.

Es wurde schon im § 62 bemerkt, dass die Jacobi'sche Function die Grundlage der elliptischen Functionen bildet, in der Art, dass dieselben sich sämmtlich durch jene ausdrücken lassen. Dieses soll nun im Folgenden näher ausgeführt werden.

Wir hatten § 61 (20) gefunden:

$$\Pi(u, a) = u \, . \, Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \prod \frac{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4h-2}}$$

und dann § 62 (10)

$$\prod\left(1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}\right) = \frac{\Theta(u)}{\prod\left(1 - q^{2h}\right)}.$$

Hieraus fliesst zunächst ein Ausdruck der Transcendente Π durch Θ nämlich:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Pi(u, a) = u \, Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

Aus dieser Form geht sogleich der schon § 20 bewiesene Satz über die Vertauschung des Arguments mit dem Parameter bei der elliptischen Transcendente der dritten Gattung wieder hervor. Denn vertauscht man in der vorigen Formel u mit a, so

erhält man, weil, wie sich aus der Reihe (6) § 62 für $\Theta(u)$ unmittelbar ergiebt,

$$\Theta(-u) = \Theta(u)$$

ist,

$$\Theta(u-a) = \Theta(a-u),$$

und folglich

$$(2) \quad . \; . \; . \quad \Pi(u, a) - u\, Z(a) = \Pi(a, u) - a\, Z(u).$$

Setzt man darin noch $u = K$, so erhält man, weil

$$\Pi(a, K) = o, \; Z(K) = o$$

ist,

$$\Pi(K, a) = K Z(a).$$

Wir hatten ferner (17) § 61 gefunden:

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \tfrac{1}{2} k^2 [\sin^2 am(u+a) - \sin^2 am(u-a)].$$

Führt man darin die Function $\varDelta$ statt des Sinus ein, indem

$$k^2 \sin^2 am\, z = 1 - \varDelta^2 am\, z$$

ist, so kommt

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \tfrac{1}{2}[\varDelta^2 am(u-a) - \varDelta^2 am(u+a)],$$

und wenn man von o bis u integrirt,

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = \tfrac{1}{2}\int_0^u \varDelta^2 am(u-a)\, du - \tfrac{1}{2}\int_0^u \varDelta^2 am(u+a)\, du.$$

Nun ist aber

$$\int_0^z \varDelta^2 am\, z dz = E(z) \text{ und } E(-z) = -E(z),$$

folglich

$$\int_0^u \varDelta^2 am(u-a)\, du = E(u-a) + E(a),$$

$$\int_0^u \varDelta^2 am(u+a)\, du = E(u+a) - E(a).$$

Demnach erhält man

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = E(a) + \tfrac{1}{2} E(u-a) - \tfrac{1}{2} E(u+a),$$

oder wenn man die Relation (14) § 60:

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u)$$

benutzt,

(3) . . $$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u - a) - \tfrac{1}{2} Z(u + a).$$

Integrirt man diese Gleichung nun nochmals zwischen o und u, so ergiebt sich

$$\Pi(u, a) = u \,.\, Z(a) + \tfrac{1}{2} \int_0^u Z(u - a)\, du - \tfrac{1}{2} \int_0^u Z(u + a)\, du.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit der Formel (1) liefert nun auch eine Beziehung zwischen den Transcendenten Z und Θ; nämlich zunächst erhält man

$$\log \frac{\Theta(u + a)}{\Theta(u - a)} = \int_0^u Z(u + a)\, du - \int_0^u Z(u - a)\, du.$$

Setzt man aber darin $a = u$ und bemerkt, dass

(4) . . $$\begin{cases} \int_0^u Z(u + a)\, du = \int_0^{u+a} Z(z)\, dz - \int_0^a Z(z)\, dz \\ \int_0^u Z(u - a)\, du = \int_0^{u-a} Z(z)\, dz - \int_0^a Z(z)\, dz, \text{*)} \end{cases}$$

so folgt

$$\log \frac{\Theta(2u)}{\Theta(o)} = \int_0^{2u} Z(z)\, dz,$$

oder, wenn man wieder u statt $2u$ schreibt,

(5) . . . . . . $$\log \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = \int_0^u Z(u)\, du.$$

Hieraus fliesst zunnächst die Formel, vermittelst welcher Jacobi im § 52 der Fundamente die Function Θ eingeführt hat, nämlich

---

*) Weil nämlich $Z(z)$ eine ungerade Function, also

$$Z(-z) = -Z(z)$$

ist.

$$\Theta(u) = \Theta(o)\, e^{\int_0^u Z(u)\,du};$$

ferner aber erhält man durch Differentiation auch Z durch Θ ausgedrückt, nämlich

$$Z(u) = \frac{d \,.\, \log \Theta(u)}{du},$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\frac{d\Theta(u)}{du} = \Theta'(u)$$

setzt,

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Kehren wir nun noch einmal zur Formel (3) zurück und schreiben in dem linken Theile derselben den aus der ursprünglichen Definition der Transcendenten Π (§ 20) folgenden Werth, so lautet dieselbe so.

$$\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \varDelta\, am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a).$$

Vertauscht man darin a mit u, so entsteht, weil $Z(-z) = -Z(z)$,

$$\frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u\, \varDelta\, am\, u \sin^2 am\, a}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u} = Z(u) - \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a).$$

Durch Addition beider erhält man also

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad Z(u) + Z(a) - Z(u+a) =$$

$$k^2 \sin am\, u \sin am\, a \frac{\sin am\, u \cos am\, a\, \varDelta\, am\, a + \sin am\, a \cos am\, u\, \varDelta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u}$$

$$= k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\, (u+a),$$

wodurch das Additionstheorem für die zweite Gattung aufs neue abgeleitet worden ist. Setzt man darin $a = K$, so folgt, weil $Z(K) = o$ ist, (§ 60)

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad Z(u) - Z(u+K) = k^2 \sin am\, u \sin am\, (u+K).$$

Schreibt man diese Gleichung, indem man $-u$ statt u einführt, in folgender Form

$$Z(u) + Z(K-u) = k^2 \sin am\, u \sin am\, (K-u),$$

so ergiebt sie auch den Werth von Z für das Argument $\frac{K}{2}$, nämlich, da $\sin am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$ ist, (§ 10)

$$2Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{k^2}{1+k'} = 1 - k',$$

also

$$Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1-k'}{2}.$$

Wir benutzen aber die Gleichung (7) noch in anderer Weise. Sie lässt sich nämlich auch schreiben

$$Z(u) - Z(u+K) = \frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u} = -\frac{d \log \varDelta\, am\, u}{du}.$$

Integrirt man nun zwischen o und u, und benutzt die Gleichung (5)

$$\int_0^u Z(u)\, du = \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

aus welcher mit Berücksichtigung der ersten der Gleichuugen (4) auch leicht die folgende

$$\int_0^u Z(u+K)\, du = \log \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)}$$

sich ergiebt, so folgt

$$\log \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} - \log \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)} = -\log \varDelta\, am\, u$$

oder

$$\varDelta\, am\, u = \frac{\Theta(o)}{\Theta(K)} \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)},$$

wodurch dann die Function $\varDelta\, am\, u$ durch die Jacobi'sche Function ausgedrückt ist. Den Werth des allein vom Modul abhängigen Coefficienten $\frac{\Theta(o)}{\Theta(K)}$ erhält man leicht, wenn man $u = K$ setzt und sich erinnert, dass $\Theta(2K) = \Theta(o)$, $\varDelta\, am\, K = k'$ ist, nämlich

$$\frac{\Theta(o)}{\Theta(K)} = \sqrt{k'},$$

was sich auch aus den Formeln (12) § 62 ergeben hätte. Man hat also

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \varDelta\, am\, u = \sqrt{k'} \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Dasselbe Resultat hätte man auch aus dem unendlichen Product ableiten können. Denn es war (10) § 62

$$(9) \quad \Theta(u) = \prod (1 - q^{2h})\,(1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}).$$

Setzt man darin $u + K$ für u, so erhält man

$$\Theta(u + K) = \prod (1 - q^{2h})\,(1 + 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}),$$

also

$$\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} = \prod_1^{\infty}{}_h \frac{1 + 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}{1 - 2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}},$$

und vergleicht man dies mit dem unendlichen Product für $\Delta\, am\, u$, (18) § 54, so ergiebt sich sofort, wie oben,

$$\Delta\, am\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

§ 65.

Wir wollen nun auch in ähnlicher Weise $\Theta(u + iK')$ bilden und sowohl das unendliche Product, als auch die unendliche Reihe dafür ermitteln. Zuerst ist, wenn man

$$\frac{\pi u}{2K} = x$$

setzt

$$1 - 2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2} = 1 - q^{2h-1}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + q^{4h-2}$$
$$= (1 - q^{2h-1}e^{2ix})\,(1 - q^{2h-1}e^{-2ix}).$$

Setzt man nun darin $u + iK'$ statt u und bezeichnet $\frac{\pi(u+iK')}{2K}$ mit x_1, so ist

$$(10) \;.\;.\; x_1 = x + \frac{\pi i K'}{2K};\; 2ix_1 = 2ix - \frac{\pi K'}{K},\; e^{2ix_1} = q\,e^{2ix}.$$

Demnach wird

$$1 - 2q^{2h-1}\cos 2x_1 + q^{4h-2} = (1 - q^{2h}e^{2ix})(1 - q^{2h-2}e^{-2ix}),$$

also

$$\prod_1^{\infty}{}^h (1 - 2q^{2h-1} \cos 2x_1 + q^{4h-2})$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (1 - q^2 e^{2ix})\,(1 - q^4 e^{2ix})\,(1 - q^6 e^{2ix}) \ldots \\ (1 - e^{-2ix})\,(1 - q^2 e^{-2ix})\,(1 - q^4 e^{-2ix})\,(1 - q^6 e^{-2ix}) \ldots \end{array} \right.$$

$$= (1 - e^{-2ix}) \prod_1^{\infty}{}^h (1 - q^{2h} e^{2ix})\,(1 - q^{2h} e^{-2ix})$$

$$= (1 - e^{-2ix}) \prod_1^{\infty}{}^h (1 - 2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}).$$

Ferner ist aber:

$$(1 - e^{-2ix}) = e^{-ix}\,(e^{ix} - e^{-ix}) = 2ie^{-ix} \sin x,$$

also

$$\prod_1^{\infty}{}^h (1 - 2q^{2h-1} \cos 2x_1 + q^{4h-2})$$

$$= 2ie^{-ix} \sin x \prod_1^{\infty}{}^h (1 - 2q^{2h} \cos 2x + q^{4h}).$$

Demnach folgt nun aus (9)

$$(11)\quad \frac{\Theta(u+iK')}{\prod_1^{\infty}{}^h (1 - q^{2h})} = 2ie^{-\frac{\pi i u}{2K}} \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_1^{\infty}{}^h \left(1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}\right)$$

und folglich

$$\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)} = 2ie^{-\frac{\pi i u}{2K}} \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_1^{\infty}{}^h \frac{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}.$$

Dieses ist aber das unendliche Product, welches (nach (18) § 54) sin *am* *u* darstellt. Demnach erhält man

$$\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)} = i\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi i u}{2K}} \sin am\, u$$

oder

$$(12) \quad \ldots \ldots \sin am\, u = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{k}}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}\,\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)}.$$

Also ist auch sin *am* *u*, freilich vorerst noch in imaginärer Form, durch die Jacobi'sche Function dargestellt.

Um nun auch eine reelle Form dafür zu erhalten, entwickeln wir auch die Reihe für $\Theta(u + iK')$. Es ist ((6) § 62)

$$\Theta(u) = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n(-1)^n q^{n^2} \cos 2nx$$

und daher

$$\Theta(u + iK') = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n(-1)^n q^{n^2} \cos 2nx_1.$$

Nun ist aber

$$2\cos 2nx_1 = e^{2nix_1} + e^{-2nix_1}$$
$$= q^n e^{2nix} + \frac{1}{q^n} e^{-2nix} \quad \text{(wegen (10))}.$$

Demnach erhält man:

$$\Theta(u + iK') = 1 - q\left(qe^{2ix} + \frac{1}{q}e^{-2ix}\right) + q^4\left(q^2 e^{4ix} + \frac{1}{q^2}e^{-4ix}\right)$$
$$- q^9\left(q^3 e^{6ix} + \frac{1}{q^3}e^{-6ix}\right) + \dots$$
$$= 1 - q^2 e^{2ix} + q^6 e^{4ix} - q^{12} e^{6ix} + \dots\dots$$
$$- e^{-2ix} + q^2 e^{-4ix} - q^6 e^{-6ix} + \dots$$

Multiplicirt und dividirt man aber diese Reihe mit e^{ix}, so erhält man

$$\Theta(u+iK') = e^{-ix}\{e^{ix} - q^2 e^{3ix} + q^6 e^{5ix} - q^{12} e^{7ix} + \dots\dots$$
$$- e^{-ix} + q^2 e^{-3ix} - q^6 e^{-5ix} + q^{12} e^{-7ix} - \dots\dots\}$$
$$= 2ie^{-ix}\{\sin x - q^2 \sin 3x + q^6 \sin 5x - q^{12} \sin 7x + \dots\}$$
$$= 2ie^{-ix}\{\sin x - \sqrt[4]{q^8} \sin 3x + \sqrt[4]{q^{24}} \sin 5x$$
$$- \sqrt[4]{q^{48}} \sin 7x + \dots\},$$

also wenn man nun noch mit $\sqrt[4]{q}$ multiplicirt und dividirt,

$$\Theta(u+iK') = \frac{2ie^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}\{\sqrt[4]{q} \sin x - \sqrt[4]{q^9} \sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}} \sin 5x$$
$$- \sqrt[4]{q^{49}} \sin 7x + \dots\}$$

oder

$$\Theta(u+iK') = \frac{2ie^{-\frac{\pi iu}{2K}}}{\sqrt[4]{q}}\left\{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \dots\right\}.$$

Hieraus geht nun hervor, dass

$$\frac{\Theta(u+iK')}{i}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}$$

eine reelle Grösse ist. Die vorstehende Reihe hat **Jacobi** als eine neue Function eingeführt, die er mit $H(u)$ bezeichnet, indem er setzt *)

$$(13)\quad H(u) = 2\left\{\sqrt[4]{q}\,\sin\frac{\pi u}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\,\sin\frac{3\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\,\sin\frac{5\pi u}{2K} - \dots\right\}.$$

Diese Reihe convergirt ebenfalls sehr stark, da die Exponenten von q unter dem Wurzelzeichen die Quadrate der ungeraden Zahlen sind. Nach dem Vorigen hängen die Functionen H und Θ durch die Gleichung

$$(14)\quad \dots\quad H(u) = \frac{\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}}{i}\,\Theta(u+iK')$$

zusammen. Führt man dies nun in die Gleichung (12) ein, so ergiebt sich

$$(15)\quad \dots\quad \sin am\, u = \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}.$$

Aus (11) aber erhält man $H(u)$ in ein unendliches Product entwickelt, nämlich

$$(16)\qquad H(u) = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\,(1-q^{2h})\sin\frac{\pi u}{2K}\,(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}).$$

Setzt man hierin endlich $u+K$ für u, so erhält man

$$(17)\quad H(u+K) = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\,(1-q^{2h})\cos\frac{\pi u}{2K}(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}).$$

Hierin ist aber das unendliche Product der Zähler der Entwickelung für $\cos am\, u$ ((18) § 54). Da nun folgt:

$$\frac{H(u+K)}{\Theta(u)} = 2\sqrt[4]{q}\,\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}{}^{h}\,\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}},$$

so ergiebt sich

$$(18)\quad \dots\quad \cos am\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u)}.$$

---

*) Fundamenta. § 61. 63.

In eine Reihe entwickelt ergiebt sich aus (13)

$$(19) \quad . \quad H(u+K) = 2\left\{\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^9}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right\}.$$

Endlich folgt aus (14), weil $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ ist,

$$(20) \quad . \quad . \quad H(u+K) = \sqrt[4]{q}\, e^{\frac{\pi i u}{2K}}\, \Theta(u+K+iK').$$

Hiedurch ist nun erwiesen, dass auch $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ und $\varDelta\, am\, u$ allein von der Jacobi'schen Function abhängen, indem ihre Zähler Jacobi'sche Functionen mit den Argumenten $u+iK'$, $u+K+iK'$ und $u+K$ sind. Alsdann erhält man eine neue Reihenentwickelung für die elliptischen Functionen in Form von Brüchen, deren Zähler und Nenner sehr stark convergirende Reihen sind. Nämlich es ist nun

$$(21)\left\{\begin{aligned}
\sin am\, u &= \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}\\
&= 2\sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\sin 3\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K} - 2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots}\\
\cos am\, u &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u)}\\
&= 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^9}\cos 3\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5\frac{\pi u}{2K} + \cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K} - 2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots}\\
\varDelta\, am\, u &= \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\\
&= \sqrt{k'}\,\frac{1+2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K} + 2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots}{1-2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi u}{K} - 2q^9\cos 3\frac{\pi u}{K} + \cdots}
\end{aligned}\right.$$

Durch die Jacobi'sche Function allein ausgedrückt aber hat man

$$\sin am\, u = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{k}}\, e^{\frac{\pi i u}{2K}}\, \frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)}$$

$$\cos am\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt[4]{q}\; e^{\frac{\pi i u}{2K}}\, \frac{\Theta(u+K+iK')}{\Theta(u)}$$

$$\varDelta\, am\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Es war ferner (S. 254)

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

und aus der Reihe (6) § 62 für die Jacobi'sche Function erhält man durch Differentiation

$$\Theta'(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{q \sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 \sin\frac{3\pi u}{K} - \dots\right\};$$

folglich ist

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q \sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 \sin\frac{3\pi u}{K} - \dots}{1 - 2q \cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K} + \dots}$$

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung (1) § 64

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

für die dritte Gattung die Reihe

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log \frac{1 - 2q \cos\frac{\pi(u-a)}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi(u-a)}{K} - \dots}{1 - 2q \cos\frac{\pi(u+a)}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi(u+a)}{K} - \dots}$$

Aus der Reihe (13) für $H(u)$ folgt unmittelbar

$$H(o) = o, \quad H(-u) = -H(u), \quad H(u + 4K) = H(u)$$
$$H(u + 2K) = -H(u),$$

sodass H mit dem Index $4K$ periodisch ist. Ferner folgt aus (18)

$$H(K) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, \Theta(o);$$

es war aber ((12) § 62)

$$\Theta(o) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}};$$

mithin erhält man mit Berücksichtigung des aus der Reihe (13) für $H(u)$ folgenden Werthes von $H(K)$

$$H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\left\{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \dots\right\}.$$

Da endlich auch ((12) § 62)

$$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

ist, so folgt

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(o)}{\Theta(K)}.$$

oder

$$\sqrt{k} = 2\frac{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots},$$

wodurch k und k' unmittelbar aus q berechnet werden können.

§ 66.

Wir müssen zum Schlusse dieser Betrachtungen noch einer merkwürdigen Formel Erwähnung thun, welche eine Art von Kreislauf in der Theorie der elliptischen Functionen enthält, vermöge dessen man von verschiedenen Seiten her zu allen Theilen der Theorie gelangen kann.

Wir sind in den früheren Untersuchungen nach und nach zu folgenden Relationen gelangt

$$\Theta(u) = \Theta(o)\, e^{\int_0^u Z(u)\, du}$$

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}\, u$$

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'}\, \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Daraus ergiebt sich successive

$$E(u) = k' \int_0^u \left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 du$$

$$Z(u) = k' \int_0^u \left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 du - \frac{E}{K}\, u$$

$$= \int_0^u \left\{k' \left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 - \frac{E}{K}\right\} du$$

$$(22) \qquad \Theta(u) = \Theta(o) \cdot e^{\int_0^u \int_0^u \left\{k' \left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 - \frac{E}{K}\right\} du\, du}.$$

Dieses ist die oben erwähnte Formel; sie zeigt, dass man, von der Jacobi'schen Function $\Theta(u)$ ausgehend, durch eine mässige Anzahl analytischer Operationen wiederum auf dieselbe Function zurückkommt; sie zeigt ferner, wie man von dem Bruche $\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}$ aus, welcher die Function $\varDelta\, am\, u$ darstellt, zur Jacobi'schen Function, also zu dem Zähler und Nenner dieses Bruches gelangt. Kehrt man endlich diese Formel um, so ergiebt sich auch eine Andeutung des Weges, wie man von der Jacobi'schen Function aus zu den einfachen elliptischen Functionen kommen kann. Aus (22) folgt nämlich

$$\int_0^u\int_0^u \left\{k'\left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 - \frac{E}{K}\right\} du\, du = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

also

$$k'\left(\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}\right)^2 = \varDelta^2\, am\, u = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log\Theta(u)}{du^2},$$

und

$$k^2 \sin^2 am\, u = 1 - \frac{E}{K} - \frac{d^2\log\Theta(u)}{du^2}.$$

Setzt man darin, um auch die Constanten durch die Jacobi'sche Function auszudrücken, $u = o$, so ergiebt sich

$$1 - \frac{E}{K} = \left[\frac{d^2\log\Theta(u)}{du^2}\right]_0,$$

also

$$k^2 \sin^2 am\, u = \left[\frac{d^2\log\Theta(u)}{du^2}\right]_0 - \frac{d^2\log\Theta(u)}{du^2},$$

Führt man darin die Function Z ein, indem man zur Abkürzung setzt

$$\frac{d\log\Theta(u)}{du} = Z(u), \quad \frac{d^2\log\Theta(u)}{du^2} = \frac{dZ(u)}{du} = Z'(u),$$

so kann man die vorige Gleichung auch so schreiben

$$k^2 \sin^2 am\, u = Z'(o) - Z'(u).$$

Wir wollen uns hier mit dieser Andeutung begnügen; die weitere Ausführung des Gedankens, die Theorie der elliptischen Functionen von der Reihe, welche die Jacobi'sche Function darstellt, aus zu entwickeln, wie es Jacobi in seinen Vorlesungen zu thun pflegte, würde weit über die Grenzen dieser Schrift hinausführen. Ueber die Natur der Jacobi'schen Function möge aber noch das hinzugefügt werden, dass dieselbe eigentlich eine Reihe

von Exponentialgrössen mit quadratischen Exponenten ist. Bildet man nämlich die folgende Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h \, e^{a+hz+h^2c}$$

in welcher a und c als constant, z aber als veränderlich betrachtet wird, und setzt darin

$$e^a = A, \quad e^c = q, \quad z = ix,$$

so verwandelt sie sich in

$$\sum_0^{\infty}{}_h \, Aq^{h^2} \left(e^{hix} + e^{-hix}\right) = \sum_0^{\infty}{}_h \, 2Aq^{h^2} \cos hx,$$

wobei von dem $h = o$ entsprechenden Gliede nur die Hälfte zu nehmen ist. Sie geht daher unmittelbar in die Jacobi'sche Function

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} + \dots$$

über, wenn man $x = \frac{\pi u}{K}$ und $A = (-1)^h$ setzt.

Neunzehnter Abschnitt.

Ueber die elliptischen Transcendenten der dritten Gattung.

---

§ 67.

Wir gehen nun zu einer genaueren Betrachtung der elliptischen Transcendenten der dritten Gattung, namentlich zur Untersuchung der verschiedenen, bei ihr zu unterscheidenden Fälle über.

Das elliptische Integral der dritten Gattung hatte nach Legendre die Form

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

und wir haben § 20 gesehen, dass es mit der Jacobi'schen Transcendenten Π in der Beziehung

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\,\Pi(u, a)$$

steht, wenn

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u \quad \text{und} \quad n = -k^2 \sin^2 am\, a$$

gesetzt wird. Die Grösse n konnte sowohl reell als auch imaginär sein. Wir behandeln nun zunächst den Fall eines reellen n; dann erhellt, dass der Parameter a nur dann reell ausfällt, wenn n ein negativer echter Bruch ist, der zwischen o und $-k^2$ liegt. Ferner entsprechen einander folgende Intervalle:

$\sin am\, a$	zwischen 0 und 1,	n	zwischen o und $-k^2$
$\sin am\, a$	,, 1 ,, $\frac{1}{k}$,	n	,, $-k^2$,, -1
$\sin am\, a$	,, $\frac{1}{k}$,, ∞,	n	,, -1 ,, $-\infty$
$\sin am\, a$	rein imaginär,	n	positiv.

Nun wächst aber a von 0 bis K, wenn $\sin am\, a$ von 0 bis 1 zunimmt. Wird $\sin am\, a$ grösser als 1, so zeigen die Formeln (§ 10)

$$\sin am\,(iu + K) = \frac{1}{\Delta\, am\,(u, k')} = \frac{1}{k}\,\Delta\, am\,(K' - u, k'),$$

$$\sin am\,(iK' + K) = \frac{1}{k},$$

dass a in die Form $iu + K$ übergeht, in welcher u von 0 bis K' wächst, während $\sin am\, a$ von 1 bis $\frac{1}{k}$ zunimmt. Wird nun $\sin am\, a$ noch grösser als $\frac{1}{k}$, so zeigen die Formeln

$$\sin am\,(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \sin am\,(u + iK') = \frac{1}{k \sin am\, u},$$

$$\sin am\, iK' = \infty,$$

dass nun a in die Form $u + iK'$ übergeht, in welcher u von K bis 0 abnimmt, während $\sin am\, a$ von $\frac{1}{k}$ bis ∞ wächst. Also hat man folgende entsprechende Intervalle:

$\sin am\, a$ zwischen 0 und 1;	a zwischen 0	und K
$\sin am\, a$ „ 1 „ $\frac{1}{k}$;	a „ K	„ $K + iK'$
$\sin am\, a$ „ $\frac{1}{k}$ „ ∞;	a „ $K + iK'$	„ iK'.

Wenn endlich $\sin am\, a$ rein imaginär ist, so nimmt wegen der Formel

$$\sin am\,(iu, k) = i \operatorname{tg} am\,(u, k')$$

a die Form iu an. Hieraus geht nun hervor, dass man für die verschiedenen Intervalle, in denen n liegen kann, folgende Werthe für n zu setzen hat.

1) n zwischen 0 und $-k^2$; $n = -k^2 \sin^2 am\, a$
2) n „ $-k^2$ „ -1; $n = -k^2 \sin^2 am\,(ia + K)$
3) n „ -1 „ $-\infty$; $n = -k^2 \sin^2 am\,(a + iK')$
4) n „ $+\infty$ „ 0; $n = -k^2 \sin^2 am\, ia$,

wobei dann a in allen vier Fällen reell ist. Legendre*) hat gezeigt, dass man die beiden letzten Fälle auf die beiden ersten reduciren kann. Wir kommen darauf unten zurück, zuvor aber wollen wir die in allen vier Fällen dienlichen Formeln zur Verwandlung der Legendre'schen Form in die Jacobi'sche zusammenstellen. Es kommt dabei nur auf die Werthe des Ausdrucks $\frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}$ an, wenn an die Stelle von a die Argumente $ia + K$, $a + iK'$ und ia treten. Da man aber nach den Formeln des § 8 und 10 hat

$$\frac{\operatorname{tg} am\,(ia+K)}{\Delta\, am\,(ia+K)} = i\, \frac{\Delta\, am\,(a, k')}{k'^2 \sin am\,(a, k') \cos am\,(a, k')}$$

$$\frac{\operatorname{tg} am\,(a+iK')}{\Delta\, am\,(a+iK')} = -\frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}$$

$$\frac{\operatorname{tg} am\, ia}{\Delta\, am\, ia} = i\, \frac{\sin am\,(a, k') \cos am\,(a, k')}{\Delta\, am\,(a, k')},$$

so erhält man folgende Reductionsformeln:

1) n zwischen 0 und $-k^2$; $n = -k^2 \sin^2 am\, a$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\, \Pi\,(u, a)$$

---

*) Legendre. Exercices I. pag. 68 ff. Traité I. Chap. XV.

2) n zwischen $-k^2$ und -1; $n = -k^2 \sin^2 am\,(ia + K)$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{\Delta\, am\,(a,k')}{k'^2 \sin am\,(a,k') \cos am\,(a,k')}\, i\Pi\,(u, ia+K)$$

3) n zwischen -1 und $-\infty$; $n = -k^2 \sin^2 am\,(a + iK')$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u - \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\, \Pi\,(u,\, a + iK')$$

4) n positiv; $n = -k^2 \sin^2 am\, ia$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u + \frac{\sin am\,(a,k') \cos am\,(a,k')}{\Delta\, am\,(a,k')}\; i\,\Pi\,(u,\, ia),$$

wobei in allen Fällen $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$ gesetzt ist.

Wir behandeln nun noch den Fall, dass die Grösse n selbst imaginär ist, und werden zeigen, dass man dann dieselbe auf die Form $-k^2 \sin^2 am\,(a + ib)$ bringen kann, wo a und b reell sind.*) Es sei

$$n = p + iq$$

eine beliebige complexe Grösse; man setze

$$-(p + iq) = k^2 \sin^2 am\,(a + ib),$$

also auch

$$-(p - iq) = k^2 \sin^2 am\,(a - ib),$$

dann folgt zunächst

$$k^2 + (p \pm iq) = k^2 \cos^2 am\,(a \pm ib)$$
$$1 + (p \pm iq) = \Delta^2 am\,(a \pm ib).$$

Setzt man nun ferner

$$-p - iq = \varrho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$
$$k^2 + p + iq = \varrho'^2 (\cos 2\theta' + i \sin 2\theta')$$
$$1 + p + iq = \varrho''^2 (\cos 2\theta'' + i \sin 2\theta''),$$

so kann man $\varrho, \varrho', \varrho'', \theta, \theta', \theta''$ aus den gegebenen Grössen k, p, q bestimmen. Alsdann ist

---

*) Vgl. Richelot. Darstellung einer beliebigen gegebenen Grösse durch $\sin am\,(u+w, k)$. Crelle's Journ. Bd. 45.

$$k \sin am\,(a + ib) = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$k \cos am\,(a + ib) = \varrho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$\varDelta\, am\,(a + ib) = \varrho''\,(\cos\theta'' + i\sin\theta'')$$
$$k \sin am\,(a - ib) = \varrho\,(\cos\theta - i\sin\theta),$$
$$k \cos am\,(a - ib) = \varrho'\,(\cos\theta' - i\sin\theta'),$$
$$\varDelta\, am\,(a - ib) = \varrho''\,(\cos\theta'' - i\sin\theta'').$$

Da nun

$$2a = (a + ib) + (a - ib)$$
$$2bi = (a + ib) - (a - ib)$$

ist, so erhält man nach den Fundamentalformeln (§ 27),

$$\sin am\,(u \pm v) = \frac{\sin am\,u \cos am\,v\, \varDelta\, am\,v \pm \sin am\,v \cos am\,u\, \varDelta\, am\,u}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v}$$

$$\cos am\,(u \pm v) = \frac{\cos am\,u \cos am\,v \mp \sin am\,u \sin am\,v\, \varDelta\, am\,u\, \varDelta\, am\,v}{1 - k^2 \sin^2 am\,u \sin^2 am\,v},$$

$$\sin am\,2a = \frac{\varrho\varrho'\varrho''}{k^2} \cdot \frac{\cos(\theta - \theta' - \theta'') + i\sin(\theta - \theta' - \theta'')}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}}$$
$$+ \frac{\varrho\varrho'\varrho''}{k^2} \cdot \frac{\cos(-\theta + \theta' + \theta'') + i\sin(-\theta + \theta' + \theta'')}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}}$$

also

$$\sin am\,2a = \frac{2\varrho\varrho'\varrho'' \cos(\theta - \theta' - \theta'')}{k^2 - \varrho^4},$$

und auf dieselbe Weise

$$\sin am\,2bi = \frac{2i\varrho\varrho'\varrho'' \sin(\theta - \theta' - \theta'')}{k^2 - \varrho^4}$$

$$\cos am\,2a = \frac{\frac{\varrho'^2}{k^2} - \frac{\varrho^2\varrho''^2}{k^2}}{1 - \frac{\varrho^4}{k^2}} = \frac{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2}{k^2 - \varrho^4}$$

$$\cos am\,2bi = \frac{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2}{k^2 - \varrho^4}.$$

Demnach

$$\operatorname{tg} am\,2a = \frac{2\varrho\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2} \cos(\theta - \theta' - \theta'')$$

$$\operatorname{tg} am\,2bi = \frac{2i\varrho\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2} \sin(\theta - \theta' - \theta'').$$

Setzt man aber

$$\frac{\varrho\varrho''}{\varrho'} = \operatorname{tg}\alpha,$$

so ist

$$\frac{2\varrho\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 - \varrho^2\varrho''^2} = \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \frac{2\varrho\varrho'\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2\varrho''^2} = \sin 2\alpha,$$

also, wenn man sich erinnert, dass (§ 8)

$$\operatorname{tg} am\, 2bi = i \sin am\,(2b, k')$$

ist,

$$\operatorname{tg} am\, 2a = \operatorname{tg} 2\alpha \cos(\theta - \theta' - \theta'')$$
$$\sin am\,(2b, k') = \sin 2\alpha \sin(\theta - \theta' - \theta''),$$

wodurch a und b gegeben sind.

§ 68.

Zur Erledigung aller im vorigen § aufgestellten Fälle bedürfen wir jetzt der Kenntniss der Functionen E, Z und Θ für imaginäre Argumente. Ehe wir aber zur Ermittelung derselben übergehen, haben wir zuvor einen wichtigen Satz abzuleiten, der von den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung gilt und von Legendre herrührt. Bezeichnen nämlich K und K' die vollständigen Integrale der ersten Gattung mit den Moduln k und k', ferner E und E' die vollständigen Integrale der zweiten Gattung mit denselben Moduln, so hat Legendre*) bewiesen, dass

$$\text{(A)} \quad \ldots\ldots \quad K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Wir betrachten K und E als Functionen von k^2 und suchen zunächst ihre Differentialquotienten nach k^2 auf. Dazu sei der Kürze wegen

$$k^2 = c, \quad k'^2 = c'$$

gesetzt, sodass auch $c + c' = 1$ ist. Dann ist auch

$$\frac{dc'}{dc} = -1.$$

Man bemerke zugleich, dass, wenn $f(c)$ eine beliebige Function von c ist, man auch

$$\frac{d\,f(c)}{dc'} = -\frac{d\,f(c)}{dc}$$

hat. Endlich merke man auch gleich die Formel

$$\frac{d(cc')}{dc} = c' - c.$$

Nun ist

*) Legendre. Exercices du calcul intégral. I. pag. 61 ff., und Traité des fonctions elliptiques. I. Chap. XII. XIII.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

und analog

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c'\sin^2\varphi}}; \qquad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c'\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Daraus folgt

$$\frac{dK}{dc} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3\varphi}; \quad \frac{dE}{dc} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Um diese Integrale durch K und E auszudrücken, setze man im ersten

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\Delta^2\varphi}{k^2},$$

so erhält man

$$\frac{dK}{dc} = \frac{1}{2k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} - \frac{1}{2k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun fanden wir § 22 (54)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\,\Delta\varphi} + \frac{E_1(\varphi)}{k'^2}.$$

Demnach ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{E}{k'^2},$$

und dann

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}.$$

Der Ausdruck für $\frac{dE}{dc}$ ergiebt sich unmittelbar aus der § 18 (36) gefundenen Formel

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{F(\varphi)-E_1(\varphi)}{k^2},$$

nämlich

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dE}{dc} = \frac{E-K}{2c}.$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich noch

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d(K-E)}{dc} = \frac{E}{2c'}.$$

Man kann nun aus (1) und (2) zwei Differentialgleichungen herstellen, von welchen die eine nur K, die andere nur E enthält, indem man nämlich beide auf's Neue nach c differentiirt und dann einmal E, das andere Mal K eliminirt. Durch Differentiation von (1) folgt

$$\frac{d^2K}{dc^2} = \frac{1}{2cc'}\frac{dE}{dc} - \frac{c'-c}{2c^2c'^2}E - \frac{1}{2c}\frac{dK}{dc} + \frac{K}{2c^2},$$

und wenn man darin die Werthe von $\frac{dE}{dc}$ und $\frac{dK}{dc}$ substituirt und reducirt

$$\frac{d^2K}{dc^2} = \frac{2c'-c}{4c^2c'}K - \frac{c'-c}{2c^2c'^2}E.$$

Um nun hieraus E zu eliminiren, zieht man aus (1)

$$\frac{c'-c}{cc'}\frac{dK}{dc} = \frac{c'-c}{2c^2c'^2}E - \frac{c'-c}{2c^2c'}K,$$

und addirt man dies zur vorigen Gleichung, so ergiebt sich

$$\frac{d^2K}{dc^2} + \frac{c'-c}{cc'}\cdot\frac{dK}{dc} = \frac{K}{4cc'}$$

oder

$$(4) \quad \ldots \quad 4cc'\frac{d^2K}{dc^2} + 4(c'-c)\frac{dK}{dc} - K = 0.$$

Dieses ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K als Function von c genügen muss. Denkt man an die Stelle von K irgend einen anderen Buchstaben gesetzt, z. B. x, so ist also $x = K$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, aber nur eine particuläre, weil sie keine willkürliche Constante enthält. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass auch $x = K'$ eine particuläre Lösung der nämlichen Gleichung ist, d. h. dass K' ebenfalls der Gleichung (4) genügt. Da nämlich K' dieselbe Function von c' ist, wie K von c, so wird die Gleichung (4) ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn man c mit c' und zugleich K mit K' vertauscht. Demnach hat man auch die Gleichung

$$4cc'\frac{d^2K'}{dc'^2} - 4(c'-c)\frac{dK'}{dc'} - K' = 0.$$

Nun ist aber, wie oben bemerkt, wegen $\frac{dc'}{dc} = -1$

$$\frac{dK'}{dc'} = -\frac{dK'}{dc} \quad \text{und} \quad \frac{d^2K'}{dc'^2} = +\frac{d^2K'}{dc^2},$$

folglich ist auch

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4cc'\frac{d^2K'}{dc^2} + 4(c'-c)\frac{dK'}{dc} - K' = 0,$$

d. h. es genügt auch K' der Differentialgleichung (4). Da nun diese linear und homogen ist, so lässt sich auch die vollständige Lösung angeben, nämlich, bezeichnen a und b zwei willkürliche Constanten, so ist

$$x = aK + bK'$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$4cc'\frac{d^2x}{dc^2} + 4(c'-c)\frac{dx}{dc} - x = 0.$$

Ebenso lässt sich auch eine Differentialgleichung für E aufstellen und vollständig integriren, was hier, obgleich es zu unserem eigentlichen Zwecke nicht nothwendig wäre, gleich mit angeschlossen werden möge.

Durch Differentiation der Gleichung (2) ergiebt sich

$$\frac{d^2E}{dc^2} = -\frac{E-K}{2c^2} + \frac{1}{2c}\frac{d(E-K)}{dc},$$

und durch Substitution des Werthes (3) von $\frac{d(E-K)}{dc}$ und Reduction

$$\frac{d^2E}{dc^2} = \frac{K}{2c^2} - \frac{1+c'}{4c^2c'}E.$$

Addirt man hiezu die aus (2) fliessende Gleichung

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dc} = \frac{E}{2c^2} - \frac{K}{2c^2},$$

so folgt

$$\frac{d^2E}{dc^2} + \frac{1}{c}\frac{dE}{dc} = -\frac{E}{4cc'},$$

oder

$$4cc'\frac{d^2E}{dc^2} + 4c'\frac{dE}{dc} + E = 0.$$

Dieses ist die Differentialgleichung, von welcher $y = E$ eine particuläre Lösung ist, wenn mit y die durch die Gleichung zu bestimmende Function bezeichnet wird. Ihr genügt aber nicht auch E', man kann jedoch, um eine zweite particuläre Lösung zu finden, die Gleichung (1) benutzen, die sich auch schreiben lässt

$$E = 2cc' \frac{dK}{dc} + c'K.$$

Setzt man darin nämlich y und x an die Stelle von E und K, so ist

$$y = 2cc' \frac{dx}{dc} + c'x,$$

und diese Gleichung kann man benutzen, um aus den beiden particulären Werthen von x die entsprechenden von y zu finden. Für $x = K$ ergiebt sich nämlich wie natürlich $y = E$, für $x = K'$ aber erhält man

$$y = 2cc' \frac{dK'}{dc} + c'K',$$

oder weil

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{dK'}{dc} = -\frac{dK'}{dc'} = \frac{K'}{2c'} - \frac{E'}{2cc'}$$

ist

$$y = -E' + cK' + c'K' = K' - E'.$$

Demnach ist $K' - E'$ die zweite particuläre, und

$$y = a_1 E + b_1 (K' - E')$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$4cc' \frac{d^2y}{dc^2} + 4c' \frac{dy}{dc} + y = 0.$$

mit den willkürlichen Constanten a_1 und b_1.

Um nun zum Beweise der Gleichung (A) zu schreiten, kehren wir jetzt zu den Gleichungen (4) und (5) zurück, die wir mit einander combiniren. Multiplicirt man nämlich die erste derselben mit K' und die andere mit K, so ergiebt die Subtraction der Producte

$$cc' \left(K' \frac{d^2K}{dc^2} - K \frac{d^2K'}{dc^2}\right) + (c' - c)\left(K' \frac{dK}{dc} - K \frac{dK'}{dc}\right) = 0.$$

Bemerkt man nun, dass

$$K' \frac{d^2K}{dc^2} - K \frac{d^2K'}{dc^2} = \frac{d\left(K' \frac{dK}{dc} - K \frac{dK'}{dc}\right)}{dc}$$

$$c' - c = \frac{d(cc')}{dc}$$

ist, so sieht man, dass die vorige Gleichung links ein vollständiges Differential hat. Bezeichnet daher C eine constante, d. h.

von c oder k^2 unabhängige, Grösse, so erhält man durch Integration

$$cc' \left(K' \frac{dK}{dc} - K \frac{dK'}{dc}\right) = C.$$

Substituirt man darin die in (1) und (6) ermittelten Werthe

$$\frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}, \quad \frac{dK'}{dc} = \frac{K'}{2c'} - \frac{E'}{2cc'},$$

so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$K'E + KE' - KK' = 2C.$$

Hiemit ist zunächst bewiesen, dass der Ausdruck $K'E + KE' - KK'$ einen von dem Modul k unabhängigen Werth haben, also einer absoluten Zahl $2C$ gleich sein muss. Um die letztere zu finden, kehren wir zu den Integralen zurück. Denn da

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi \, d\varphi$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k') \, d\psi$$

ist, so erhält man

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi \, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k') \, d\psi$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}.$$

Weil aber die Variabeln φ und ψ von einander unabhängig sind, so gehen die Producte der Integrale in Doppelintegrale über, und man hat auch

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta^2\varphi + \Delta^2(\psi, k') - 1}{\Delta\varphi \, \Delta(\psi, k')} \, d\varphi \, d\psi.$$

Dieses Integral muss nach dem Vorigen für jeden Werth von k denselben Werth besitzen. Man braucht seinen Werth daher nur für $k = 0$ zu ermitteln, dann ist

$$k' = 1, \quad \Delta\varphi = 1, \quad \Delta(\psi, k') = \cos\psi;$$

also

$$2C = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2},$$

folglich, was zu beweisen war,

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

§ 69.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Functionen Z und Θ für die Argumente iu, $iu + K$ und $u + iK'$ über*). Nach der Definition § 18 ist

$$E(iu) = \int_0^{iu} \Delta^2 am\, z dz,$$

oder wenn man $z = iv$ setzt und die Formel (12) § 8

$$\Delta\, am\, iv = \frac{\Delta\, am\, (v, k')}{\cos am\, (v, k')}$$

anwendet,

$$E(iu) = i\int_0^u \frac{\Delta^2\, am\, (v, k')}{\cos^2 am\, (v, k')}\, dv.$$

Setzt man darin nach § 3

$$\Delta^2\, am\, (v, k') = k^2 + k'^2 \cos^2 am\, (v, k'),$$

so erhält man

$$E(iu) = ik^2\int_0^u \frac{dv}{\cos^2 am\, (v, k')} + ik'^2 u.$$

Nach § 19 (40) aber ist

$$\int_0^u \frac{dv}{\cos^2 am\, (v, k')} = \frac{1}{k^2}\, \mathrm{tg}\, am\, (u, k')\, \Delta\, am\, (u, k') + u - \frac{1}{k^2}\, E(u, k')$$

folglich wird:

$$E(iu) = i\, \mathrm{tg}\, am\, (u, k')\, \Delta\, am\, (u, k') - i\, E(u, k') + iu.$$

---

*) Jacobi. Fundamenta nova § 56 ff.

Führt man darin nun die Function Z ein, so ist nach § 60 (14)

$$E(iu) = i\frac{E}{K}u + Z(iu); \quad E(u,k') = \frac{E'}{K'}u + Z(u,k'),$$

also erhält man

$$i\frac{E}{K}u + Z(iu) = i \operatorname{tg} am(u,k')\, \Delta am(u,k') - i\frac{E'}{K'}u - iZ(u,k') + iu$$

$$iZ(iu) = -\operatorname{tg} am(u,k')\, \Delta am(u,k') + u\left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right) + Z(u,k').$$

Nun ist nach dem im vorigen § bewiesenen Satze

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{EK' + E'K - KK'}{KK'} = \frac{\pi}{2KK'},$$

folglich wird

$$(1) \quad iZ(iu) = -\operatorname{tg} am(u,k')\, \Delta am(u,k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u,k'),$$

welches der gesuchte Ausdruck für $Z(iu)$ ist.

Daraus folgt durch Integration sogleich $\Theta(iu)$. Es ist nämlich § 64 (5)

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = \int_0^u Z(u)\,du.$$

also

$$\log\frac{\Theta(iu)}{\Theta(o)} = \int_0^{iu} Z(v)\,dv = i\int_0^u Z(iv)\,dv,$$

und

$$\int_0^u Z(u,k')\,du = \log\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(o,k')}.$$

Da nun ferner

$$-\operatorname{tg} am(u,k')\, \Delta am(u,k') = \frac{d\log\cos am(u,k')}{du},$$

ist, so erhält man aus (1)

$$\log\frac{\Theta(iu)}{\Theta(o)} = \log\cos am(u,k') + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(o,k')}$$

oder

$$(2) \quad . \quad . \quad \frac{\Theta(iu)}{\Theta(o)} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cos am(u,k')\, \frac{\Theta(u,k')}{\Theta(o,k')}.$$

Hieraus lassen sich zuerst unsere früheren Formeln für $\Theta(u + iK')$ und $\Theta(u + 2iK')$ nochmals ableiten. Durch Sub-

stitution von $u + K'$ für u und nachherige Vertauschung von iu mit u ergiebt sich wie oben

$$(3) \qquad \Theta(u + iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{i\pi u}{2K}} \sin am\, u \,.\, \Theta(u),$$

und wenn man nochmals $u + iK'$ statt u setzt, oder auch in (2) $u + 2K'$ statt u substituirt,

$$\Theta(u + 2iK') = -\frac{1}{q}\, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\, \Theta(u).$$

Durch Division mit $\Theta(o)$ und logarithmische Differentiation folgt dann:

$$(4) \qquad \begin{cases} Z(u + iK') = -\dfrac{i\pi}{2K} + \operatorname{cotg} am\, u\, \Delta\, am\, u + Z(u) \\ Z(u + 2iK') = -\dfrac{i\pi}{K} + Z(u), \end{cases}$$

woraus auch noch die speciellen Formeln

$$\Theta(iK') = o \qquad\qquad Z(iK') = \infty$$

$$\Theta(2iK') = -\frac{\Theta(o)}{q} = -\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} \qquad Z(2iK') = -\frac{i\pi}{K}\text{*)}$$

fliessen.

Ein Ausdruck für $\Theta(iu + K)$ ergiebt sich, wenn man in der Formel (8) § 64

$$\Theta(u + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, \Delta\, am\, u \,.\, \Theta(u)$$

iu für u setzt, und ausser der Formel (2) auch noch die Glei chung

$$\Delta\, am\,(iu) = \frac{\Delta\, am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')}$$

anwendet. Dann wird zunächst

$$\Theta(iu + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, \frac{\Delta\, am\,(u, k')}{\cos am\,(u, k')}\, \Theta(iu),$$

also wenn man mit $\Theta(o)$ dividirt und (2) einsetzt

$$(5) \qquad \frac{\Theta(iu + K)}{\Theta(o)} = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\, \Delta\, am\,(u, k')\, \frac{\Theta(u, k')}{\Theta(o, k')},$$

---

*) Hienach ist der Druckfehler in § 57. 5) der Fundamenta zu verbessern.

oder da auch

$$\Theta(u+K',k') = \sqrt{\frac{1}{k}}\,\Delta\,am\,(u,k')\;\Theta(u,k')$$

ist,

$$(6)\quad . \quad . \quad \frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(o)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\;\frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(o,k')}.$$

Man bemerke dabei, dass nach (12) § 62

$$\Theta(o) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\quad \text{also}\quad \Theta(o,k') = \sqrt{\frac{2kK'}{\pi}}$$

und folglich

$$\frac{\Theta(o)}{\Theta(o,k')} = \sqrt{\frac{k'K}{kK'}}$$

ist. Substituirt man dies noch in (5) und (6), so erhält man auch

$$(7)\quad \Theta(iu+K) = \sqrt{\frac{K}{kK'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\;\Delta\,am\,(u,k')\;\Theta(u,k')$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\;\Theta(u+K',k').$$

Nimmt man in den Formeln (5) und (6) die Logarithmen und differentiirt, so erhält man $Z(iu+K)$, nämlich

$$(8)\quad . \quad . \quad iZ(iu+K) = \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u+K',k')$$

$$= \frac{\pi u}{2KK'} - \frac{k'^2 \sin am\,(u,k')\cos am\,(u,k')}{\Delta\,am\,(u,k')} + Z(u,k').$$

§ 70.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir nun zu den im § 67 aufgestellten vier Fällen zurück, und wollen zeigen, dass sich der 3te und 4te Fall resp. auf den 1sten und 2ten reduciren lässt. Den Ausgangspunct bildet die Grundformel (1) § 64

$$(9)\quad . \quad . \quad . \quad \Pi(u,a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

Nun war im dritten Falle der Parameter $a + iK'$; für denselben ist daher

(10) $\Pi\,(u, a + iK') = u\,Z\,(a + iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\,(u - a - iK')}{\Theta\,(u + a + iK')}.$

Aus (4) und (3) des vorigen § aber folgt:

$$Z\,(a + iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \operatorname{cotg} am\, a\ \Delta\, am\, a + Z\,(a)$$

$$\Theta\,(a \mp u + iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{i\pi(a \mp u)}{2K}} \sin am\,(a \mp u)\ \Theta\,(a \mp u),$$

mithin da

$$\Theta\,(a - u + iK') = \Theta\,(u - a - iK')$$

ist,

$$\log\frac{\Theta\,(u - a - iK')}{\Theta\,(u + a + iK')} = -\frac{i\pi\,(a - u)}{2K} + \frac{i\pi\,(a + u)}{2K}$$
$$+ \log\frac{\sin am\,(a - u)}{\sin am\,(a + u)} + \log\frac{\Theta\,(u - a)}{\Theta\,(u + a)}.$$

Dieses nun in (10) substituirt, giebt

$$\Pi\,(u, a + iK') = -\frac{i\pi u}{2K} + u \operatorname{cotg} am\, a\ \Delta\, am\, a + u\,Z\,(a)$$
$$+ \frac{i\pi u}{2K} + \frac{1}{2}\log\frac{\sin am\,(a - u)}{\sin am\,(a + u)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\,(u - a)}{\Theta\,(u + a)},$$

und wenn man die Formel (9) noch einmal anwendet,

(11) $\Pi\,(u, a + iK') = \Pi\,(u, a) + u \operatorname{cotg} am\, a\ \Delta\, am\, a$

$$+ \frac{1}{2}\log\frac{\sin am\,(a - u)}{\sin am\,(a + u)},$$

wodurch der erste und dritte Fall auf einander reducirt sind.

Um zur Reductionsformel für den 2ten und 4ten Fall zu gelangen, setzen wir in (9) zuerst $a + K$ statt a, dann wird

(12) $\Pi\,(u, a + K) = u\,Z\,(a + K) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\,(u - a - K)}{\Theta\,(u + a + K)}.$

Da nun aus (7) und (8) § 64

$$Z\,(a + K) = -\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\Delta\, am\, a} + Z\,(a)$$

$$\Theta\,(a \mp u + K) = \sqrt{\frac{1}{k'}}\ \Delta\, am\,(a \mp u)\ \Theta\,(a \mp u)$$

folgt, so erhält man

$$\Pi(u, a+K) = -u\,\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\varDelta\, am\, a} + u\,Z(a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{\varDelta\, am(a-u)}{\varDelta\, am(a+u)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$
$$= \Pi(u, a) - u\,\frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a}{\varDelta\, am\, a}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{\varDelta\, am(a-u)}{\varDelta\, am(a+u)}.$$

In dieser Formel setze man nun ia statt a, so folgt

$$(13)\qquad \Pi(u, ia+K) = \Pi(u, ia) - u\,\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\varDelta\, am\, ia}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{\varDelta\, am(ia-u)}{\varDelta\, am(ia+u)}.$$

Nun ist aber ((25) § 27)

$$\frac{\varDelta\, am(ia-u)}{\varDelta\, am(ia+u)} = \frac{\varDelta\, am\, ia\, \varDelta\, am\, u + k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia \sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, ia\, \varDelta\, am\, u - k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia \sin am\, u \cos am\, u},$$

oder weil nach § 8

$$\sin am\, ia = i \operatorname{tg} am(a, k'); \quad \cos am\, ia = \frac{1}{\cos am(a, k')}$$
$$\varDelta\, am\, ia = \frac{\varDelta\, am(a, k')}{\cos am(a, k')}$$

ist,

$$\frac{\varDelta\, am(ia-u)}{\varDelta\, am(ia+u)} = \frac{\varDelta\, am(a, k')\, \varDelta\, am\, u + ik^2 \operatorname{tg} am(a, k') \sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am(a, k')\, \varDelta\, am\, u - ik^2 \operatorname{tg} am(a, k') \sin am\, u \cos am\, u}.$$

Da ferner

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x+iy}{x-iy} = i \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

ist, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\varDelta\, am(ia-u)}{\varDelta\, am(ia+u)} = i \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{k^2 \operatorname{tg} am(a, k')}{\varDelta\, am(a, k')}\; \frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u}\right\}.$$

Ebenso wird

$$\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\varDelta\, am\, ia} = ik^2\,\frac{\operatorname{tg} am(a, k')}{\varDelta\, am(a, k')}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{k^2 \operatorname{tg} am(a, k')}{\varDelta\, am(a, k')} = A,$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\varDelta\, am(ia-u)}{\varDelta\, am(ia+u)} = i \operatorname{arc\,tg}\left\{A\,\frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\varDelta\, am\, u}\right\}$$
$$\frac{k^2 \sin am\, ia \cos am\, ia}{\varDelta\, am\, ia} = iA,$$

und man erhält durch Substitution dieser Ausdrücke in (13) die gesuchte Reductionsformel für den 2ten und 4ten Fall, nämlich:

$$(14)\quad i\Pi(u, ia+K') = i\Pi(u, ia) + A\,u - \operatorname{arctg}\left(A\,\frac{\sin am\,u \cos am\,u}{\Delta\,am\,u}\right).$$

Legendre hat die elliptischen Integrale der dritten Gattung, je nachdem sie dem 1sten und 3ten oder dem 2ten und 4ten Falle angehören, durch besondere Namen unterschieden; und zwar, weil in der Reductionsformel (11) für den 1sten und 3ten Fall ein Logarithmus vorkommt, so nennt er diese Klasse die logarithmische (*Intégrales à paramètre logarithmique*); die andere Klasse dagegen, welche dem 2ten und 4ten Falle angehört, heisst wegen des in der Reductionsformel (14) vorkommenden Arcus Tangens die circuläre (*Intégrales à paramètre circulaire*) *).

§ 71.

Wir haben oben § 67 gesehen, dass, wenn die Grösse n Legendre's selbst imaginär ist, der Parameter complex von der Form $a + ib$ wird. In diesem Falle kommt also das Additionstheorem zur Anwendung, und zwar dasjenige für die Parameter. Wir schreiten zuerst zu einer neuen Ableitung des Additionstheoremes für die Argumente.

Aus der Formel (9) des vorigen § erhält man

$$\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

$$\Pi(v, a) = v\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(v-a)}{\Theta(v+a)}$$

$$\Pi(u+v, a) = (u+v)\,Z(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+v-a)}{\Theta(u+v+a)},$$

und wenn man die letzte Gleichung von der Summe der beiden ersteren abzieht,

$$(15)\quad \Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u+v, a)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)}.$$

Damit ist die Form des Additionstheoremes, wie es in § 34 ab-

*) Legendre. Traité des Fonctions elliptiques III. p. 138.

geleitet wurde, bereits hergestellt; es kommt nur noch darauf an, die unter dem Logarithmus stehende Grösse durch elliptische Functionen auszudrücken. Dazu bedürfen wir einer Relation, die sich aus der Gleichung (3) des § 64 ergiebt. Wir fanden

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a).$$

Integrirt man diese Gleichung nach dem Parameter a zwischen den Grenzen o und a, so erhält man

$$\int_0^a \frac{\Pi(u,a)}{du}\,da = \int_0^a Z(a)\,da + \tfrac{1}{2}\int_0^a Z(u-a)\,da - \tfrac{1}{2}\int_0^a Z(u+a)\,da.$$

Allein wegen (4) und (5) § 64 ist

$$\int_0^a Z(a)\,da = \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(o)}; \quad \int_0^a Z(u-a)\,da = -\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u)}$$

$$\int_0^a Z(u+a)\,da = \log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u)}.$$

also

$$\int_0^a \frac{d\,\Pi(u,a)}{du}\,da = \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(o)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u)}$$

$$= \log\frac{\Theta(a)}{\Theta(o)} - \tfrac{1}{2}\log\Theta(u-a)\,\Theta(u+a) + \log\Theta(u).$$

Andererseits aber hat man nach der Definition der Transcendenten Π

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta\, am\, a \sin^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u},$$

und dieses ist gleich

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{d\log(1 - k^2 \sin am^2 a \sin^2 am\, u)}{da},$$

folglich ist auch

$$\int_0^a \frac{d\,\Pi(u,a)}{du}\,da = -\tfrac{1}{2}\log(1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u).$$

Demnach erhält man:

$$- \tfrac{1}{2} \log (1 - k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am\, u) = \log \frac{\Theta(a)}{\Theta(o)}$$
$$- \tfrac{1}{2} \log \Theta(u-a)\, \Theta(u+a) + \log \Theta(u),$$

und wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\left(\frac{\Theta(u)\,\Theta(a)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+a)\,\Theta(u-a)}{1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, a}.$$

Mit Hülfe dieser Relation kann der in (15) unter dem Logarithmus enthaltene Ausdruck auf zweierlei Weise durch elliptische Functionen ausgedrückt werden, von denen die eine hier näher ausgeführt werden soll *). Schreibt man statt der vorigen Gleichung

$$\left(\frac{\Theta(x)\Theta(y)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(x+y)\Theta(x-y)}{1-k^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, y}$$

und setzt darin nach der Reihe

$$\begin{aligned}
&x = u - a &&\text{sodass} && x + y = u + v - 2a\\
&y = v - a &&&& x - y = u - v\\[4pt]
&x = u + a &&&& x + y = u + v + 2a\\
&y = v + a &&&& x - y = u - v\\[4pt]
&x = u + v - a &&&& x + y = u + v\\
&y = a &&&& x - y = u + v - 2a\\[4pt]
&x = u + v + a &&&& x + y = u + v + 2a\\
&y = a &&&& x - y = u + v,
\end{aligned}$$

so erhält man

$$\left(\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2 \sin^2 am(u-a) \sin^2 am(v-a)}$$
$$\left(\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(u-v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2 \sin^2 am(u+a) \sin^2 am(v+a)}$$
$$\left(\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v-a)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v-2a)}{1-k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am(u+v-a)}$$
$$\left(\frac{\Theta(a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(o)}\right)^2 = \frac{\Theta(u+v)\,\Theta(u+v+2a)}{1-k^2 \sin^2 am\, a \sin^2 am(u+v+a)},$$

*) Jacobi. Fundamenta nova § 54.

und wenn man das Product aus der ersten und vierten Gleichung durch das der zweiten und dritten dividirt, und die Wurzel nimmt:

$$\frac{\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)\,\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)\,\Theta(u+v-a)} =$$

$$\sqrt{\frac{1-k^2\sin^2 am(u+a)\sin^2 am(v+a)}{1-k^2\sin^2 am(u-a)\sin^2 am(v-a)}\cdot\frac{1-k^2\sin^2 am\, a\,\sin^2 am\,(u+v-a)}{1-k^2\sin^2 am\, a\,\sin^2 am\,(u+v+a)}}.$$

Durch eine ziemlich complicirte Rechnung, welche sich im § 54 der Fundamente vollständig ausgeführt findet, kann man diesen Ausdruck auch in den im § 34 gefundenen:

$$(16)\qquad \frac{1-k^2\sin am\, a\,\sin am\, u\,\sin am\, v\,\sin am(u+v-a)}{1+k^2\sin am\, a\,\sin am\, u\,\sin am\, v\,\sin am\,(u+v+a)}$$

verwandeln.

Aus dem Additionstheoreme für die Argumente (15) ergiebt sich das für die Parameter mit Hülfe des Satzes von der Vertauschung des Arguments mit dem Parameter (§ 64).

Wir fanden dort (2)

$$(17)\quad .\ .\quad \Pi\,(u,a) = u\,Z\,(a) - a\,Z\,(u) + \Pi\,(a,u).$$

Demnach ist auch

$$\Pi\,(u,b) = u\,Z\,(b) - b\,Z\,(u) + \Pi\,(b,u).$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\Pi\,(u,a) + \Pi\,(u,b) = u\,[Z\,(a) + Z\,(b)] - (a+b)\,Z\,(u) + \Pi\,(a,u) + \Pi\,(b,u).$$

Darin kann man nun die beiden letzten Glieder nach (15) vereinigen; wendet man auch zugleich das Additionstheorem der zweiten Gattung an ((6) § 64), wonach

$$Z\,(a) + Z\,(b) = Z\,(a+b) + k^2\sin am\, a\,\sin am\, b\,\sin am\,(a+b)$$

ist, so erhält man

$$\Pi(u,a)+\Pi(u,b) = u Z(a+b) + u k^2 \sin am\, a\,\sin am\, b\,\sin am\,(a+b)$$
$$-(a+b)\,Z(u) + \Pi(a+b,u) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(a-u)\,\Theta(b-u)\,\Theta(a+b+u)}{\Theta(a+u)\,\Theta(b+u)\,\Theta(a+b-u)}.$$

Allein wegen (17) ist auch

$$u\,Z\,(a+b) - (a+b)\,Z\,(u) + \Pi\,(a+b,u) = \Pi\,(u,a+b).$$

Demnach wird

$$\Pi(u, a) + \Pi(u, b) = \Pi(u, a+b) + u k^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am\, (a+b)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(a-u)\, \Theta(b-u)\, \Theta(a+b+u)}{\Theta(a+u)\, \Theta(b+u)\, \Theta(a+b-u)},$$

oder wenn man in dem Ausdrucke (16) a mit u und v mit b vertauscht,

$$\Pi(u, a) + \Pi(u, b) = \Pi(u, a+b) + u k^2 \sin am\, a \sin am\, b \sin am\, (a+b)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \log \frac{1 - k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\, b \sin am\, (a+b-u)}{1 + k^2 \sin am\, u \sin am\, a \sin am\, b \sin am\, (a+b+u)},$$

und hierin besteht das Theorem für die Addition der Parameter.

Anhang.

Zwanzigster Abschnitt.

Ueber die Bewegung des sphärischen Pendels.

§ 72.

Als ein grösseres Beispiel für die Anwendung der elliptischen Functionen und namentlich ein solches, bei welchem auch die Transcendenten der zweiten und dritten Gattung eine Rolle spielen, soll im Folgenden die Bewegung des sphärischen Pendels, d. h. die Bewegung eines Punctes, der, allein von der Schwerkraft getrieben, auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben gezwungen ist, untersucht werden.

Es sei der Mittelpunct der Kugel, oder der Aufhängepunct des Pendels, der Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive z-Axe mit der Richtung der Schwere zusammenfällt. Bezeichnet dann r den Radius der Kugel oder die Länge des Pendels, g die Acceleration der Schwere und N den Druck, den der materielle Punct (dessen Masse der Einheit gleich angenommen werden möge) auf die Oberfläche der Kugel ausübt, so ist

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel, und ferner

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = N\,\dfrac{x}{r} \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} = N\,\dfrac{y}{r} \\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2} = N\,\dfrac{z}{r} + g \end{cases}$$

die Differentialgleichungen der Bewegung (t bedeutet die Zeit).

Multiplicirt man die Differentialgleichungen resp. mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$, so erhält man durch Addition

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$= 2\frac{N}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) + 2g\frac{dz}{dt},$$

und da vermöge der Gleichung (1)

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

ist, durch Integration

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + c,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Gleichung enthält den Satz der lebendigen Kraft. Eine zweite Integralgleichung liefert der Flächensatz für die xy-Ebene. Multiplicirt man nämlich die erste der Gleichungen (2) mit y, die zweite mit x und subtrahirt, so kommt

$$x\frac{d^2y}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = o,$$

und man erhält daher durch Integration, wenn c' eine zweite willkürliche Constante bedeutet,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c'.$$

Wir führen jetzt Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x = r \sin\psi \cos\varphi, \; y = r \sin\psi \sin\varphi, \; z = r\cos\psi$$

setzen, sodass ψ die zwischen o und π genommene Neigung des Pendels gegen die positive z-Axe (die Verticale), und φ den Winkel bedeutet, den eine durch das Pendel und die z-Axe gelegte Ebene mit der xz-Ebene bildet. Man erhält hieraus durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt} = r\cos\psi\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - r\sin\psi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = r\cos\psi\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + r\sin\psi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = -r\sin\psi\frac{d\psi}{dt},$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (3) und (4)

$$r^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gr \cos \psi + c$$

$$r^2 \sin^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} = c'.$$

Dividirt man beiderseits mit r^2 und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c'}{r^2} = C, \qquad \frac{c}{r^2} = A,$$

so folgt

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \sin^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

und wenn man den daraus hervorgehenden Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$ in die erstere Gleichung substituirt,

$$(6) \quad \ldots \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\sin^2 \psi} = \frac{2g}{r} \cos \psi + A.$$

Hieraus ergiebt sich alsdann

$$(7) \quad \ldots \quad dt = \frac{\sin \psi \, d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cos \psi + A\right) \sin^2 \psi - C^2}},$$

und wenn man diesen Werth in (5) substituirt,

$$(8) \quad \ldots \quad d\varphi = \frac{C \sin \psi \, d\psi}{\sin^2 \psi \sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cos \psi + A\right) \sin^2 \psi - C^2}}.$$

Um die willkürlichen Constanten A und C durch Grössen auszudrücken, welche eine mechanische Bedeutung haben, nehmen wir an, das Pendel befinde sich zur Zeit $t = o$ in der xz-Ebene, sodass für $t = o$ auch $\varphi = o$ sei; die zu derselben Zeit stattfindenden Werthe von ψ, $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ aber seien resp. ψ_0, ψ'_0 und φ'_0; dann erhält man aus den Gleichungen (5) und (6)

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} C = \sin^2 \psi_0 \, \varphi'_0 \\ A = (\psi'_0)^2 + \sin^2 \psi_0 \, (\varphi'_0)^2 - \frac{2g}{r} \cos \psi_0. \end{cases}$$

Denkt man sich nun die am Anfange der Bewegung stattfindende ganze Geschwindigkeit v in zwei rechtwinklige Componenten u und w zerlegt, die eine, u, in der xz-Ebene und senkrecht zum Radius, die andere, w, parallel der horizontalen xy-Ebene und ebenfalls senkrecht zum Radius, so ist

$$u = r \, \psi'_0, \quad w = r \sin \psi_0 \, \varphi'_0,$$

und durch diese Geschwindigkeiten ausgedrückt wird

$$(10) \quad . \quad . \quad \begin{cases} C = \frac{\sin \psi_0}{r} w \\ A = \frac{u^2 + w^2}{r^2} - \frac{2g}{r} \cos \psi_0 = \frac{v^2}{r^2} - \frac{2g}{r} \cos \psi_0. \end{cases}$$

Den Winkel ψ_0 lassen wir vor der Hand noch unbestimmt, um späterhin die zweckmässigste Annahme für ihn treffen zu können.

Integrirt man nun die Gleichungen (7) und (8) von $t = o$ an, so erhält man

$$(11) \quad \begin{cases} t = \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi \, d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cos \psi + A\right) \sin^2 \psi - C^2}} \\ \varphi = C \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi \, d\psi}{\sin^2 \psi \sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cos \psi + A\right) \sin^2 \psi - C^2}}. \end{cases}$$

§ 73.

Um die vorstehenden Integrale, welche elliptische Integrale sind, da die Variable $\cos \psi$ unter dem Wurzelzeichen in der dritten Potenz vorkommt, auf die Normalform zu bringen, müssen wir nach den Lehren des IIIten Abschnitts zuvörderst untersuchen, ob die cubische Gleichung, welche entsteht, wenn man den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck gleich Null setzt, eine oder drei reelle Wurzeln besitzt. Dabei bemerke man aber, dass wegen der aus (7) folgenden Gleichung

$$\sin \psi \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cos \psi + A\right) \sin^2 \psi - C^2}$$

diejenigen Werthe von ψ, für welche die Wurzelgrösse verschwindet, zugleich Maxima oder Minima von ψ sind, weil für sie auch der Differentialquotient $\frac{d\psi}{dt}$ zu Null wird.

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen giebt entwickelt

$$-\frac{2g}{r} \left\{\cos^3 \psi + \frac{Ar}{2g} \cos^2 \psi - \cos \psi - \frac{r}{2g} (A - C^2)\right\}.$$

Setzt man dann der Kürze wegen

$$(12) \quad . \quad . \quad . \qquad \cos\psi = x,\quad \frac{Ar}{2g} = a,\quad \frac{C^2 r}{2g} = b,$$

$$(13) \quad . \quad . \quad . \qquad x^3 + ax^2 - x + (b - a) = y,$$

so ist

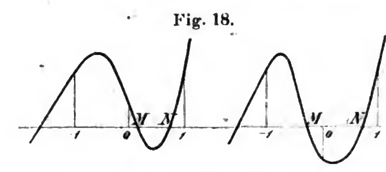
$$y = o$$

die zu untersuchende cubische Gleichung, und

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \sin\psi \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{-\frac{2g}{r}\,y}.$$

Stellt man sich die Gleichung (13) als die Gleichung einer Curve vor (Fig. 18), so kommt die Frage, ob die Gleichung $y = o$ eine oder drei reelle Wurzeln hat, darauf zurück, zu untersuchen, ob die Curve die Axe der x ein oder drei Mal schneidet. Lässt man nun x von $-\infty$ an wachsen, so wächst auch y von $-\infty$ an und erreicht für $x = -1$ den Werth b, welcher, wie man aus (12) sieht, positiv ist. Daher verschwindet y nothwendig einmal für einen Werth von x, der zwischen $-\infty$ und -1 liegt. Dieser Wurzel der Gleichung $y = o$ gehört jedoch kein Maximum oder Minimum des Winkels ψ an, weil hier der Werth von x oder $\cos\psi$ ein unechter Bruch ist, demselben also überhaupt ein reeller Werth von ψ nicht entspricht. Aus dieser Bemerkung ersieht man, dass der Beweis, den Lagrange im Art. 16 der 8ten Section im 2ten Theile der *Mécanique analytique* für die Realität der drei Wurzeln der Gleichung $y = o$ giebt, nicht stichhaltig ist. Er sagt nämlich: die Natur des Problems lehrt, dass ein einzelnes Maximum oder Minimum des Winkels ψ nicht stattfinden kann, sondern dass auf jedes Maximum ein Minimum, und umgekehrt, folgen muss. Da nun die Gleichung $y = o$ als cubische Gleichung jedenfalls eine reelle Wurzel hat, so muss sie auch eine zweite reelle Wurzel haben, und daher müssen alle drei Wurzeln reell sein. Er setzt bei diesem Beweise stillschweigend voraus, dass jeder reellen Wurzel auch ein reelles Maximum oder Minimum des Winkels ψ zugehöre. Wäre diese Voraussetzung rich-

Fig. 18.



tig, so würde gegen obigen Beweis nichts einzuwenden sein; allein, wie wir gesehen haben, ist sie nicht richtig; es könnten daher die beiden anderen Wurzeln immerhin noch imaginär sein. d. h. es könnten bei der Bewegung des sphärischen Pendels gar keine Maximal- oder Minimalwerthe des Winkels ψ vorkommen, wie dies z. B. bei dem ebenen Pendel der Fall ist, wenn dasselbe um die ganze Peripherie herumschwingt. (Vgl. § 5.)

Man kann aber auf andere Weise zeigen, dass dieser Fall in der That beim sphärischen Pendel nicht vorkommt, dass vielmehr die Gleichung $y = o$ immer drei reelle Wurzeln hat, von denen die zweite einem Maximal- und die dritte einem Minimalwerthe des Winkels ψ entspricht.

Da nämlich y zuerst (von $x = -\infty$ anfangend) negativ ist, an der Stelle $x = -1$ aber positiv geworden ist, so ist klar, dass die Curve die Axe der x aufs neue schneiden wird, die Gleichung $y = o$ also drei reelle Wurzeln haben muss, wenn y für Werthe von x, die grösser als -1 sind, wiederum aus dem Positiven in das Negative übergeht. Dass dies aber wirklich eintritt, zeigt die Gleichung (14)

$$\sin\psi \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{-\frac{2g}{r} y};$$

denn diese lehrt, dass ψ nur für solche zwischen -1 und $+1$ liegenden Werthe von x, für welche zugleich y negativ ist, reelle Werthe annimmt. Demnach hat die Gleichung $y = o$ in der That drei reelle Wurzeln, und da für $x = +1$, y wieder positiv, nämlich gleich b wird, so entsprechen den beiden letzten auch reelle Werthe von ψ. Zugleich ist ersichtlich, dass nur der zwischen den beiden letzten Durchschnittspunkten M und N der Curve mit der Abscissenaxe (Fig. 18) liegende Theil der letzteren diejenigen Werthe von x enthält, deren entsprechende Werthe von ψ während der Bewegung wirklich eintreten. Hieraus folgt denn ohne Weiteres, dass dem Puncte M der kleinste Werth von x, also der grösste von ψ, und dem Punkte N der grösste Werth von x oder der kleinste Werth von ψ angehört.

So sehen wir denn, dass der Winkel ψ während der Bewegung des sphärischen Pendels einen grössten und einen kleinsten Werth erreicht, jener möge mit α, dieser mit β bezeichnet werden. Jener entspricht dem höchsten, dieser dem tiefsten Puncte, den das Pendel während der Bewegung erreicht. Um

zu erfahren, ob diese Punkte auf der unteren oder oberen Halbkugel liegen, müssen wir unterscheiden, ob die Grösse $b - a$ positiv oder negativ ist. Die folgenden zusammengehörigen Werthe von x und y:

$$x = -\infty, \quad y = -\infty$$

$$x = -1, \quad y = b$$

$$x = o, \quad y = b - a$$

$$x = \cos\psi_0, \quad y = -\frac{r}{2g}\sin^2\psi_0\,(\psi'_0)^2$$

$$x = +1, \quad y = b$$

zeigen, dass wenn $b - a$ positiv ist, die beiden letzten Wurzeln der Gleichung $y = o$ zwischen o und $+1$ liegen, wenn dagegen $b - a$ negativ ist, die eine zwischen o und -1, die andere zwischen o und $+1$ enthalten ist. Demnach liegt β (der kleinste Werth von ψ) in jedem Falle zwischen o und $\frac{\pi}{2}$, dagegen α (der grösste Werth von ψ) liegt zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, jenachdem $b - a$ positiv oder negativ ist. Nun erhält man aber aus den Ausdrücken (12) und (10)

$$b = \frac{\sin^2\psi_0 w^2}{2gr}$$

$$a = \frac{u^2 + w^2}{2gr} - \cos\psi_0$$

$$b - a = \cos\psi_0 - \frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{2gr}.$$

Daher hat das sphärische Pendel seinen tiefsten Punct stets auf der unteren Halbkugel, und es bleibt auch fortwährend in derselben, wenn

$$\frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{r} < 2g\cos\psi_0;$$

ist dagegen

$$\frac{u^2 + w^2\cos^2\psi_0}{r} > 2g\cos\psi_0,$$

so hat es seinen höchsten Punct in der oberen Halbkugel. Nimmt man nun für den Augenblick an, dass das Pendel seine Bewegung aus dem tiefsten Puncte beginne, dass also $\psi_0 = \beta$ sei, so verschwindet, weil $\cos\beta$ eine Wurzel der Gleichung

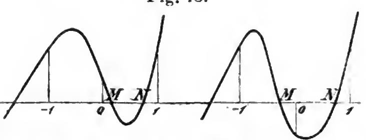
$y = o$ ist, wegen (14) der Differentialquotient $\frac{d\psi}{dt}$ *), demnach ist auch die Componente u gleich Null, und die obigen Ungleichungen verwandeln sich in

$$\frac{w^2}{r} \cos \beta \lesseqgtr 2g.$$

Nun repräsentirt w in diesem Falle die ganze Geschwindigkeit, $\frac{w^2}{r}$ also die Centrifugalkraft, und $\frac{w^2}{r} \cos \beta$ die verticale Componente derselben; man kann daher den Satz aussprechen: **Das sphärische Pendel gelangt während der Bewegung in die obere Halbkugel, oder bleibt fortwährend in der unteren, je nachdem im Augenblicke des Durchganges durch den tiefsten Punct die verticale Componente der Centrifugalkraft grösser oder kleiner als die doppelte Schwere ist.**

Die beiden Wurzeln $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ der Gleichung $y = o$ können auch einander gleich werden, dann fallen die beiden Puncte M und N (Fig. 18) zusammen, und die Curve berührt nur die Abscissenaxe. Der Spielraum für die bei der Bewegung eintretenden Werthe von ψ reducirt sich dann auf einen einzigen Werth $\psi = \psi_0 = \beta = \alpha$; d. h. der Winkel ψ ist während der ganzen Bewegung constant, das Pendel beschreibt also auf der Kugel einen kleinen Kreis. In der That wird jetzt y für reelle Werthe von ψ nicht mehr negativ, sondern erreicht nur den Werth Null, daher muss während der ganzen Bewegung wegen (14) $\frac{d\psi}{dt}$ = Null sein. Hieraus folgt zunächst, dass $u = o$ ist. Weil aber die Gleichung $y = o$ jetzt zwei gleiche Wurzeln hat, so muss auch $\frac{dy}{dx}$ verschwinden, man hat also

Fig. 18.



$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos^2 \psi + 2a \cos \psi - 1 = o;$$

*) $\sin \psi$ kann nicht Null sein, da $\cos \psi$ die Werthe $+1$ oder -1 niemals erreicht; das sphärische Pendel geht daher niemals durch die Verticale.

und substituirt man darin den für $u = o$ sich ergebenden Werth

$$a = \frac{w^2}{2gr} - \cos\psi,$$

so erhält man

$$w^2 = \frac{rg \sin^2\psi}{\cos\psi}.$$

Die Bedingungen für das Entstehen der kreisförmigen Bewegung sind daher

$$u = o \qquad w^2 = \frac{rg \sin^2\psi}{\cos\psi},$$

woraus zugleich hervorgeht, dass eine solche Bewegung nur in der unteren Halbkugel stattfinden kann.

Schreibt man die letztere Gleichung in folgender Form,

$$\frac{w^2}{r \sin\psi} \cos\psi = g \sin\psi,$$

und bedenkt, dass $r \sin\psi$ der Halbmesser des kleinen, vom Pendel beschriebenen Kugelkreises,

$$\frac{w^2}{r \sin\psi}$$

also die Centrifugalkraft in Bezug auf die Verticale als Rotationsaxe genommen,

$$\frac{w^2}{r \sin\psi} \cos\psi \quad \text{und } g \sin\psi$$

aber die auf dem Kugelradius senkrecht stehenden Componenten jener Centrifugalkraft und der Schwere sind, so kann man folgenden Satz ablesen: Das sphärische Pendel bewegt sich kreisförmig, wenn erstens die anfängliche Geschwindigkeit horizontal gerichtet, und zweitens die auf dem Kugelradius (dem Pendelfaden) senkrecht stehende Componente der auf die Verticale als Rotationsaxe bezogenen Centrifugalkraft gleich der nach derselben Richtung genommenen Componente der Schwere ist.

§ 74.

Es sollen nun die Winkel α und β statt A und C als willkürliche Constanten eingeführt werden.*) Dies geschieht leicht mit Hülfe der cubischen Gleichung $y = 0$, von welcher $\cos\alpha$

---

*) Lagrange. Mécanique analytique. II. Sect. VIII § 1.

und $\cos\beta$ zwei Wurzeln sind. Denn da der Coefficient von x in derselben $= -1$ ist, so muss, wenn die dritte Wurzel für den Augenblick mit ξ bezeichnet wird,

$$\cos\alpha\cos\beta + \xi\cos\alpha + \xi\cos\beta = -1,$$

also

$$\xi = -\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

sein. Demnach ist

$$y = (\cos\psi - \cos\beta)(\cos\psi - \cos\alpha)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right).$$

Alsdann folgt, weil a die Summe und $b-a$ das Product der drei Wurzeln, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, ist,

$$a = -\left[\cos\alpha+\cos\beta - \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right] = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

$$b - a = \frac{\cos\alpha\cos\beta\,(1+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta},$$

mithin

$$b = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

Demnach ist auch

$$(15)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} A &= \frac{2g}{r}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} \\ C &= \sqrt{\frac{2g}{r}}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}, \end{aligned}\right.$$

und die Gleichungen (11) verwandeln sich in folgende

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{-(\cos\psi-\cos\beta)(\cos\psi-\cos\alpha)\left(\cos\psi+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}}$$

$$\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\cdot$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{\sin\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{-(\cos\psi-\cos\beta)(\cos\psi-\cos\alpha)\left(\cos\psi+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}}.$$

Zur Reduction dieser Integrale auf die Normalform bedienen wir uns der im § 23 erläuterten Substitutionen der zweiten Ordnung. Setzt man der Kürze wegen

$$\cos\psi = x,\ \cos\beta = x_1,\ \cos\alpha = x_2,\ -\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = x_3,$$

sodass

$$x_1 > x_2 > x_3 > -\infty,$$

so ist das zu transformirende Integral das folgende

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

und die Integrationsgrenzen liegen zwischen den beiden auf einander folgenden Wurzeln x_1 und x_2. Nun giebt es, wie § 23 gezeigt worden ist, immer zwei Substitutionen, die sich dadurch unterscheiden, dass, wenn die Variabeln der entstehenden Normalformen mit σ und ω bezeichnet werden, x und $\sin^2\omega$ gleichzeitig abnehmen, x und $\sin^2\sigma$ aber nicht. Man hat daher folgende entsprechende Werthe der Variabeln:

(16)

Abnehmende	Werthe	von x:	x_1,	x_2,	x_3,	$\mp\infty$
Zunehmende	„	„ $\sin^2\sigma$:	0,	1,	$\frac{1}{k^2}$,	$\pm\infty$
Abnehmende	„	„ $\sin^2\omega$:	1,	0,	$\mp\infty$,	$\frac{1}{k^2}$.

Bedient man sich nun der Formeln (3), (6) und (7) des § 23, so hat man zu setzen:

bei der ersten Substitution $p = x_1,\ q = x_2,\ r = x_3,\ s = \infty,$

„ „ zweiten „ $p = x_2,\ q = x_1,\ r = \infty,\ s = x_3.$

Demnach erhält man für beide Substitutionen

$$k^2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3},$$

und dann bei der ersten Substitution

$$\sin^2\sigma = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},\quad \cos^2\sigma = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},\quad \Delta^2\sigma = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3},$$

$$-\frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = +\frac{2}{\sqrt{x_1 - x_3}}\frac{d\sigma}{\Delta\sigma},$$

und bei der zweiten Substitution

$$\sin^2\omega = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}\cdot\frac{x - x_2}{x - x_3} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{x - x_2}{x - x_3},$$

$$-\frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = -\frac{2}{\sqrt{x_1 - x_3}}\frac{d\omega}{\Delta\omega}.$$

Uebrigens ist sogleich ersichtlich, dass man auch hat

(17) . . . . $\sin\omega = \frac{\cos\sigma}{\Delta\sigma}.$

Durch α und β ausgedrückt, geben nun diese Formeln

$$(18)\quad k^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta},\quad k'^2 = \frac{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta},$$

und dann bei der ersten Substitution

$$(19)\quad \begin{cases} \cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\sigma, \quad \sin^2\sigma = \dfrac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha} \\ t = 2\sqrt{\dfrac{r}{2g}}\sqrt{\dfrac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \end{cases}$$

und bei der zweiten Substitution

$$(20)\quad \begin{cases} \sin^2\omega = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi + \dfrac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}}, \\ t = -2\sqrt{\dfrac{r}{2g}}\sqrt{\dfrac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\Delta\omega}, \end{cases}$$

wobei σ_0 und ω_0 die den Werthen $t = 0$ und $\psi = \psi_0$ entsprechenden Werthe von σ und ω bezeichnen.

Der Winkel φ wird durch ein Integral von der Form

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}$$

bestimmt. Dasselbe zerlegt sich in die beiden elliptischen Integrale dritter Gattung

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}.$$

Da diese nach der Transformation die Form

$$\int\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

annehmen, so hat man für $-\frac{1}{n}$ diejenigen Werthe von $\sin^2\sigma$ zu setzen, welche resp. den Werthen -1 und $+1$ von x entsprechen. Bezeichnen wir nun die Legendre'schen Parameter bei der ersten Substitution mit n_1 und n_2 und bei der zweiten Substitution mit m_1 und m_2, so erhalten wir:

Erste Substitution

$$\text{für } x = -1 \text{ wird } \sin^2\sigma = -\frac{1}{n_1} = \frac{x_1+1}{x_1-x_2},$$

$$\text{„ } x = +1 \text{ „ } \sin^2\sigma = -\frac{1}{n_2} = \frac{x_1-1}{x_1-x_2};$$

zweite Substitution

$$\text{für } x = -1 \text{ wird } \sin^2\omega = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{k^2}\,\frac{1+x_2}{1+x_3},$$

$$\text{„ } x = +1 \text{ „ } \sin^2\omega = -\frac{1}{m_2} = \frac{1}{k^2}\,\frac{1-x_2}{1-x_3}.$$

Erinnert man sich nun, dass x_1 und x_2 zwischen $+1$ und -1 lagen, x_3 aber < -1 war, so kann man das Schema (16) in folgender Weise erweitern:

Abnehmende Werthe von x:	$+1$,	x_1,	x_2,	-1,	x_3,	$\mp\infty$,
Zunehmende Werthe von $\sin^2\sigma$:	$-\frac{1}{n_2}$,	0,	$+1$,	$-\frac{1}{n_1}$,	$\frac{1}{k^2}$,	$\pm\infty$,
Abnehmende Werthe von $\sin^2\omega$:	$-\frac{1}{m_2}$,	1,	0,	$-\frac{1}{m_1}$,	$\mp\infty$,	$\frac{1}{k^2}$,

und sieht dann sofort, dass

$$\begin{array}{llcll} n_1 & \text{zwischen} & -1 & \text{und} & -k^2 \\ n_2 & \text{„} & 0 & \text{„} & +\infty \\ m_1 & \text{„} & 0 & \text{„} & +\infty \\ m_2 & \text{„} & -1 & \text{„} & -k^2 \end{array}$$

liegt. Hienach gehören bei beiden Substitutionen die elliptischen Integrale dritter Gattung derjenigen Klasse an, welche Legendre *Intégrales à paramètre circulaire* genannt hat. (Siehe § 70.)

Die wirkliche Transformation der in Rede stehenden Integrale ist nun leicht; nach einigen Reductionen erhält man:

Erste Substitution

$$(21)\left\{\begin{aligned} \varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}&\left\{\frac{1}{1+\cos\beta}\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}\right.\\ &\left.+\frac{1}{1-\cos\beta}\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1+n_2\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}\right\}\\ n_1 = -\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1+\cos\beta},&\quad n_2 = +\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1-\cos\beta}. \end{aligned}\right.$$

Zweite Substitution

$$(22)\left\{\begin{aligned}\varphi = &-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\left\{\frac{1}{1+\cos\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_1\sin^2\omega)\,\Delta\omega}\right.\\ &\left.+\frac{1}{1-\cos\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_2\sin^2\omega)\,\Delta\omega}\right\}\\ m_1 &= k^2\,\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)},\\ m_2 &= -k^2\,\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)}.\end{aligned}\right.$$

§ 75.

Wir werden uns nun in der Folge bei dem Winkel ψ ausschliesslich der ersten Substitution, als der einfacheren, bedienen; bei dem Winkel φ jedoch wird sich zeigen, dass die erste Substitution in vielen Fällen unbrauchbar wird, und daher die zweite angewendet werden muss.

Ueber den bis dahin noch willkürlich gelassenen Winkel ψ_0, welches der Werth des Winkels ψ zur Zeit $t = 0$ war, wollen wir nun so verfügen, dass die unteren Grenzen der auf die Normalformen reducirten Integrale, σ_0 und ω_0, verschwinden. Alsdann zeigen die Formeln (19) und (20) des vorigen §, dass man bei der ersten Substitution $\psi_0 = \beta$, und bei der zweiten Substitution $\psi_0 = \alpha$ anzunehmen hat, d. h. also, dass man bei der ersten Substitution annimmt, das Pendel beginne seine Schwingungen aus dem tiefsten Puncte, bei der zweiten dagegen aus dem höchsten Puncte.

Setzt man nun

$$\int_0^u \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u,$$

sodass

$$\sigma = am\; u$$

ist, so wird nach (19) unter der Voraussetzung $\sigma_0 = 0$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\; u,$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(23) \quad 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} = k\sqrt{\frac{2r}{g(\cos\beta-\cos\alpha)}} = M$$

setzt,

$$t = Mu.$$

Bezeichnet man ferner mit T die halbe Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, in welcher das Pendel vom tiefsten Puncte zum höchsten gelangt, so erhält man, weil nach (19) für $\psi = \beta$, $\sigma = 0$, und für $\psi = \alpha$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$T = MK.$$

Demnach kann man auch setzen

$$M = \frac{T}{K}, \quad u = \frac{t}{M} = \frac{Kt}{T},$$

und erhält

$$\sigma = am\,\frac{Kt}{T}.$$

Dies nun in (19) substituirt, liefert den Winkel ψ als Function der Zeit ausgedrückt:

$$(24) \quad \cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2 am\,\frac{Kt}{T}$$

$$= \cos\beta\cos^2 am\,\frac{Kt}{T} + \cos\alpha\sin^2 am\,\frac{Kt}{T},$$

worin nach (23) der Coefficient $\frac{K}{T}$ auch den Werth

$$\frac{K}{T} = \sqrt{\frac{g(\cos\beta-\cos\alpha)}{2rk^2}}$$

hat. In der vorigen Formel wächst das Argument der Amplitude um K, wenn t um T wächst, daher ist

$$\sin^2 \mathrm{am}\,\frac{K(t+2T)}{T} = \sin^2 am\,\frac{Kt}{T}$$

und

$$\sin^2 am\,\frac{K(T-t)}{T} = \sin^2 am\,\frac{K(T+t)}{T}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Bewegung in der Art vor sich geht, dass der Winkel ψ genau in der umgekehrten Reihenfolge der Werthe von α bis β abnimmt, wie er von β bis α gewachsen ist, und dass nach Verlauf der Zeit $2T$ immer genau dieselben Werthe von ψ periodisch wieder eintreten. In den Momenten, wo t die Werthe $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$, ... hat, hat ψ immer den gleichen Werth; nämlich, da

$$\sin^2 am\, \tfrac{1}{2}K = \sin^2 am\, \tfrac{3}{2}K = \sin^2 am\, \tfrac{5}{2}K = \ldots = \frac{1}{1+k'}$$

ist (§ 10. S. 27), so ist dann

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha + k'\cos\beta}{1+k'}.$$

Man kann die Formel (24) auf eine einfachere Gestalt bringen, wenn man statt des Winkels ψ einen anderen Winkel ψ_1 einführt, der aus dem ersteren sich durch die Gleichung

$$\frac{\cos\psi}{\cos\beta} = \cos\psi_1$$

ergiebt. Denn setzt man ausserdem auch noch

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos\alpha_1, \text{*)}$$

so erhält man

$$\cos\psi_1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin^2 am\,\frac{Kt}{T},$$

oder

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad \sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \sin am\,\frac{Kt}{T}.$$

Ferner erhält man aus (18)

$$k^2 = \frac{1-\cos^2\alpha_1}{1+2\cos\alpha_1+\dfrac{1}{\cos^2\beta}} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1}{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha_1}};$$

setzt man nun noch

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{1}{2}\alpha_1} = \operatorname{tg}\beta_1,$$

so wird

$$k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos\beta_1.$$

Der Ausdruck (26) eignet sich gut zur Entwickelung in eine Reihe. Wendet man die erste der Formeln (21) § 65 an, so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_1}{\sqrt{k}}\,\frac{H\left(\frac{Kt}{T}\right)}{\Theta\left(\frac{Kt}{T}\right)}$$

---

*) Dass $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ stets ein echter Bruch ist, erhellt daraus, dass $\cos\beta - \cos\alpha$ und $\cos\beta + \cos\alpha$ immer positive Grössen sind; das erste, weil $\alpha > \beta$, das zweite, weil nach (15) für ein verschwindendes $\cos\alpha + \cos\beta$ die Constante C, und daher auch die Geschwindigkeits-Componente w unendlich gross sein müsste. Demnach liegt β entweder zwischen 0 und α oder zwischen 0 und $\pi - \alpha$, je nachdem $\alpha \lessgtr \frac{\pi}{2}$ ist.

oder

$$(27)\left\{\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2}\psi_1 &= 2\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_1}{\cos \beta_1}}\,.\\ &\frac{\sqrt[4]{q}\sin \frac{\pi t}{2T} - \sqrt[4]{q^9}\sin 3\frac{\pi t}{2T} + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5\frac{\pi t}{2T} - \dots}{1 - 2q\cos \frac{\pi t}{T} + 2q^4\cos 2\frac{\pi t}{T} - 2q^9\cos 3\frac{\pi t}{T} + \dots}\end{aligned}\right.$$

Der Modul k ist in den meisten Fällen kleiner als der Mittelwerth $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Zuerst ist leicht einzusehen, dass dies immer der Fall ist, so lange das Pendel nicht in die obere Halbkugel gelangt. Denn da wegen der Formel (25) die Winkel α und α_1 gleichzeitig den Werth 90^0 erreichen und überschreiten, so folgt aus der Formel für k, dass dasselbe selbst für $\alpha = 90^0$ noch kleiner als $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Stellt man ferner die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2} \overset{=}{<} k^2,$$

d. h. nach (18)

$$\tfrac{1}{2} \overset{=}{<} \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}$$

auf, aus welcher

$$\sin^2\beta + 2\cos\alpha\,(\cos\alpha + \cos\beta) \overset{=}{<} 0$$

folgt, so erhält man durch Auflösung nach $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\cos\beta\,(1 \pm \sqrt{1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta})\,; \quad k^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\cos\alpha \left\{\begin{matrix} > -\frac{1}{2}\cos\beta\,(1 + \sqrt{1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta}) \\ < -\frac{1}{2}\cos\beta\,(1 - \sqrt{1 - 2\,\mathrm{tg}^2\beta}) \end{matrix}\right\}; \quad k^2 > \tfrac{1}{2}.$$

Daraus geht hervor, dass der Mittelwerth $k^2 = \frac{1}{2}$ nur für solche Werthe von β erreicht werden kann, für welche $\mathrm{tg}\,\beta \overset{=}{<} \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist (also für $\beta \overset{=}{<} 35^0\ 16'$). Für einen jeden solchen Werth von β giebt es dann zwei Werthe von α, für die $k^2 = \frac{1}{2}$ ist, und nur für die dazwischen liegenden Werthe von α wird $k^2 > \frac{1}{2}$. Die folgende kleine Tafel giebt für einige Werthe von β diese aus der vorigen Formel berechneten Werthe von α an.

β		α			
35°	16'	114°	6'	114°	6'
30	0	100	33	133	5
20	0	93	51	150	46
10	0	90	53	165	46
5	0	90	13	172	55

Man sieht hieraus, dass in der That bei weitem in den meisten Fällen der Modul unter dem Mittelwerth sein wird. Erinnert man sich nun desjenigen, was im § 52 über die Kleinheit der Grösse q gesagt ist, so leuchtet ein, dass man immer nur wenige Glieder der in der Formel (27) enthaltenen Reihen zu berechnen haben wird, ja dass für die meisten zur wirklichen Berechnung kommenden Fälle die einfache Näherungsformel

$$\sin \tfrac{1}{2} \psi_1 = 2 \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}{\cos \beta_1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi t}{2T}}{1 - 2q \cos \frac{\pi t}{T}}$$

vollkommen ausreicht.

Bei der zweiten Substitution erhält man aus den Formeln (20) und (23)

$$t = - M \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\varDelta\omega},$$

und wenn man $\psi_0 = \alpha$, also $\omega_0 = 0$ annimmt,

$$t = - M \int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{\varDelta\omega}.$$

Setzt man dann

$$\int_{0}^{\omega} \frac{d\omega}{\varDelta\omega} = u_1,$$

so wird

$$\omega = am\, u_1 \quad \text{und} \quad u_1 = - \frac{t}{M}.$$

Nun fanden wir oben (17) zwischen den Winkeln σ und ω die Relation

$$\sin \omega = \frac{\cos \sigma}{\varDelta\sigma},$$

also ist auch

$$\sin am\, u_1 = \frac{\cos am\, u}{\varDelta\, am\, u},$$

d. h. nach § 10 (17) S. 28

$$\sin am\, u_1 = \sin am\, (u + K).$$

§ 76.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Winkels φ über, dessen Ausdrücke durch σ und ω in den Formeln (21) und (22) § 74 gegeben sind, in welchen nach den im vorigen § gemachten An-

nahmen über den Anfangspunct der Zählung der Zeit $\sigma_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ zu setzen ist. Es kommt nun vor Allem darauf an, die in jenen Ausdrücken enthaltenen Integrale

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\, \Delta\sigma} \quad \text{und} \quad \int_0^\omega \frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega}$$

durch die Transcendente Π auszudrücken. Das erste derselben ist schon § 20 ermittelt worden, nämlich für

$$\int_0^\omega \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u \quad \text{und} \quad n = -k^2 \sin^2 am\, a$$

hatte sich ergeben (§ 20. S. 72)

$$(28) \quad . \quad . \quad \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\, \Delta\sigma} = u + \frac{\operatorname{tg} am\, a}{\Delta\, am\, a}\, \Pi\, (u, a).$$

Setzt man bei dem zweiten Integrale

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\Delta\omega} = u_1 \quad \text{und} \quad m = -k^2 \sin^2 am\, b,$$

so ist nach der Definition der Transcendente Π (§ 20)

$$\Pi\, (u_1, b) = \int_0^\omega \frac{k^2 \sin am\, b \cos am\, b\, \Delta\, am\, b\, \sin^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega}.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\omega \frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} = \int_0^\omega \frac{d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} - \int_0^\omega \frac{k^2 \sin^2 \omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega},$$

folglich erhält man

$$\int_0^\omega \frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1 + m \sin^2 \omega)\, \Delta\omega} = u_1 + \frac{\operatorname{tg} am\, b}{\Delta\, am\, b}\, \Pi\, (u_1, b) - \frac{\Pi\, (u_1, b)}{\sin am\, b \cos am\, b\, \Delta\, am\, b}$$

$$= u_1 - \frac{\operatorname{cotg} am\, b}{\Delta\, am\, b}\, \Pi\, (u_1, b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Es ist im § 74 gezeigt worden, dass die Legendre'schen Parameter n_1, n_2, m_1, m_2 entweder zwischen -1 und $-k^2$ oder zwischen 0 und $+\infty$ liegen, nämlich n_1 und m_2 zwischen -1 und $-k^2$, dagegen n_2 und m_1 zwischen 0 und $+\infty$. Aus den Untersuchungen des § 67 geht daher hervor, dass man zu setzen habe:

$$n_1 = -k^2 \sin^2 am\,(ia_1 + K'), \qquad m_1 = -k^2 \sin^2 am\, ib_1$$
$$n_2 = -k^2 \sin^2 am\, ia_2, \qquad m_2 = -k^2 \sin^2 am\,(ib_2 + K').$$

Nun waren aber sowohl $-\frac{1}{n_1}$ und $-\frac{1}{m_1}$, als auch $-\frac{1}{n_2}$ und $-\frac{1}{m_2}$ gewisse Werthe von $\sin^2 \sigma$ und $\sin^2 \omega$, d. h. von $\sin^2 am\, u$ und $\sin^2 am\, u_1$, welche demselben Werthe von ψ zugehörten. Ausserdem fanden wir, dass

$$\sin^2 am\, u_1 = \sin^2 am\,(u + K) = \sin^2 am\,(u - K)$$

ist. Hieraus folgt, dass die Jacobi'schen Parameter $ia_1 + K$ und ib_1, und ebenso auch ia_2 und $ib_2 + K$, nur um die Grösse K von einander verschieden sein können, dass also

$$a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2$$

sein muss. Dies bestätigt sich nun auch sofort, wenn man aus den Ausdrücken (21) und (22) für die Grössen n und m durch α und β die reellen Werthe der elliptischen Functionen der Parameter a_1, a_2, b_1, b_2 mit dem complementären Modul k' durch α und β ausgedrückt herstellt. Man findet dann, mit Benutzung der Formeln für die Argumente iu (S. 23) und $iu + K$ (S. 28), mag man von den Grössen n oder m ausgehen, dieselben Ausdrücke für b_1, b_2, wie für a_1, a_2, nämlich die folgenden:

$$(30)\quad \begin{cases} \sin^2 am\,(a_1, k') = \dfrac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha} = \dfrac{4k^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \sin^2 \frac{1}{2}\beta}{k'^2(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)} \\[2ex] \cos^2 am\,(a_1, k') = \dfrac{(1+\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha} = \dfrac{2k^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{k'^2(\cos\beta - \cos\alpha)} \\[2ex] \Delta^2 am\,(a_1, k') = \dfrac{(1+\cos\beta)(\cos\beta+\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta} = \dfrac{2k^2 \cos^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} \\[2ex] \sin^2 am\,(a_2, k') = \dfrac{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)} = \dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{4k^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\beta} \\[2ex] \cos^2 am\,(a_2, k') = \dfrac{(1-\cos\beta)(\cos\beta+\cos\alpha)}{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)} = \dfrac{tg^2 \frac{1}{2}\beta\,(\cos\beta+\cos\alpha)}{2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} \\[2ex] \Delta^2 am\,(a_2, k') = \dfrac{(1-\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)} = \dfrac{tg^2 \frac{1}{2}\alpha\,(\cos\beta+\cos\alpha)}{2\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \end{cases}$$

Da nur die Quadrate dieser elliptischen Functionen gegeben sind, so können diese selbst als positiv angenommen werden; dann liegen $am\,(a_1, k')$ und $am\,(a_2, k')$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, also a_1 und a_2 zwischen 0 und K'.

Setzt man ferner in der Gleichung (28) für a resp. $ia_1 + K$

und ia_2, und in (29) für b resp. ia_1 und $ia_2 + K'$, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (12) § 8 und (18) § 10

$$\int_0^u \frac{d\sigma}{(1+n_1 \sin^2\sigma)\Delta\sigma} = u + i \frac{\Delta\, am(a_1, k')}{k'^2 \sin am(a_1,k') \cos am(a_1,k')} \Pi(u, ia_1 + K')$$

$$\int_0^u \frac{d\sigma}{(1+n_2 \sin^2\sigma)\Delta\sigma} = u + i \frac{\sin am(a_2, k') \cos am(a_2, k')}{\Delta\, am(a_2, k')} \Pi(u, ia_2)$$

$$\int_0^\omega \frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_1 \sin^2\omega)\Delta\omega} = u_1 + i \frac{\cos am(a_1, k')}{\sin am(a_1, k')\, \Delta\, am(a_1, k')} \Pi(u_1, ia_1)$$

$$\int_0^\omega \frac{\Delta^2\omega\, d\omega}{(1+m_2 \sin^2\omega)\Delta\omega} = u_1 + i \frac{\sin am(a_2, k')\, \Delta\, am(a_2, k')}{\cos am(a_2, k')} \Pi(u_1, ia_2 + K').$$

Substituirt man nun diese Ausdrücke in die Formeln (21) und (22), nachdem man vorher die Coefficienten der Π mittelst (30) durch α und β ausgedrückt hat, so erhält man für den Winkel φ die folgenden Werthe:

Erste Substitution

$$\varphi = \frac{2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} u}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta}} + i\Pi(u, ia_1 + K') + i\Pi(u, ia_2).$$

Zweite Substitution

$$\varphi = -\frac{2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} u_1}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta}} - i\Pi(u_1, ia_1) - i\Pi(u_1, ia_2 + K').$$

Diese Ausdrücke zeigen, warum die zweite Substitution der ersten vorzuziehen ist. Da nämlich β entweder zwischen o und α oder zwischen o und $\pi - \alpha$ liegt, je nachdem α kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ stets ein unechter Bruch. Nähert sich β der Null, so wird das erste Glied sehr gross. Für $\beta = o$ aber wird wegen der Formeln (30)

$$\sin am(a_1, k') = o, \quad \sin am(a_2, k') = 1,$$
$$\cos am(a_1, k') = 1, \quad \cos am(a_2, k') = o,$$

also

$$a_1 = o, \qquad a_2 = K';$$

es geht daher

$$\Pi(u, ia_1 + K) \quad \text{in} \quad \Pi(u, K)$$
$$\Pi(u, ia_2) \quad \text{in} \quad \Pi(u, iK')$$

über, von welchen Grössen die erste Null, die zweite unendlich gross ist (§ 20. S. 72). Demnach wird der erste Ausdruck von φ für $\beta = o$ unbestimmt und erscheint bei kleinen Werthen von β als der Unterschied zweier sehr grosser Zahlen. Anders verhält sich der zweite Ausdruck für φ. Hier ist $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ stets ein echter Bruch, und da

$$\Pi(u, o) = o, \quad \Pi(u, K + iK') = o$$

ist, so verschwinden für $\beta = o$ alle drei Glieder.

Wir werden daher im Folgenden ausschliesslich den zweiten Ausdruck für φ anwenden. Im vorigen § ergab sich

$$u_1 = -\frac{t}{M};$$

da nun auch $u = \frac{t}{M}$ war, worin freilich die Zeit t einen anderen Anfangspunct der Zählung hat, so wollen wir von jetzt ab unter u den Ausdruck

$$\frac{t}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{Kt}{T}$$

verstehen, und demgemäss $-u$ für u_1 schreiben. Dann erhalten wir mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\Pi(-u, a) = -\Pi(u, a)$$

$$\varphi = \frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} \cdot \frac{Kt}{T} + i\Pi(u,ia_1) + i\Pi(u,ia_2+K).$$

Darin kann man dem ersten Gliede noch verschiedene andere Formen geben, indem man die Gleichungen (18), (23)

$$M = \frac{T}{K} = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\sqrt{\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} = k\sqrt{\frac{2r}{g(\cos\beta-\cos\alpha)}}$$

$$k = \sqrt{\frac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}},$$

sowie die Beziehungen (9), (10), (15), in welchen $\psi_0 = \alpha$ zu setzen ist,

$$C = \sin^2\alpha\,\varphi'_0 = \sin\alpha\,\frac{w}{r} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}$$

benutzt. Schreibt man nämlich der Kürze wegen

$$(31) \qquad \varphi = Pt + i\Pi(u, ia_1) + i\Pi(u, ia_2 + K),$$

so nimmt P die folgenden Formen an:

$$(32) \quad . \quad . \quad \begin{cases} P = \dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} \cdot \dfrac{K}{T} \\ \quad = \sqrt{\dfrac{2g}{r}} \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{\cos\beta+\cos\alpha}} \\ \quad = \dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}} \cdot \dfrac{kK}{T} = \dfrac{w}{r\sin\alpha} = \varphi'_0. \end{cases}$$

Wir wenden nun ferner auf die Gleichung (31) die Relation (1) des § 64

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

an, indem wir zugleich $u = \frac{Kt}{T}$ setzen; dann wird

$$\varphi = \left\{P + i\frac{K}{T}Z(ia_1) + i\frac{K}{T}Z(ia_2+K)\right\} t$$
$$+ \tfrac{1}{2} i \log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus zwei Theilen, einem periodischen, und einem, der mit der Zeit proportional wächst. Um die Bedeutung des letzteren einzusehen, bezeichnen wir mit Φ denjenigen Werth des Winkels φ, welcher der Zeit T entspricht, d. h. denjenigen Winkel, welchen eine durch das Pendel und die Verticale gelegte Ebene beschreibt, während das Pendel vom höchsten zum nächstfolgenden niedrigsten Puncte sich bewegt. Setzt man aber $t = T$, so wird $u = K$, und da nun

$$\Pi(K, a) = KZ(a)$$

ist (§ 64. S. 252), so erhält man aus (31)

$$\Phi = PT + iKZ(ia_1) + iKZ(ia_2 + K),$$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks geht der vorige Ausdruck für φ in den folgenden über:

$$(33) \qquad \varphi = \frac{\Phi}{T} t + \tfrac{1}{2} i \log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}.$$

Dieser Ausdruck ist in Verbindung mit dem, was im § 75 über die Beschaffenheit des Winkels ψ ermittelt worden ist, geeignet, eine Vorstellung von der Bewegung des sphärischen Pen-

dels zu gewähren. Nach § 62 hat die Function Θ die folgenden Eigenschaften

$$\Theta(-u) = \Theta(u)$$
$$\Theta(u + 2K) = \Theta(u - 2K) = \Theta(u)$$
$$\Theta(u + K) = \Theta(u - K).$$

Demnach verschwindet das periodische Glied des vorigen Ausdrucks für $u = o, = K, = 2K, = 3K$, etc., und man erhält folgende entsprechenden Werthe von t, ψ und φ

$$t = o, = T, = 2T, = 3T, = 4T, \ldots.$$
$$\psi = \alpha, = \beta, = \alpha, \quad = \beta, \quad = \alpha, \quad \ldots.$$
$$\varphi = o, = \Phi, = 2\Phi, = 3\Phi, = 4\Phi, \ldots.$$

Setzt man ferner $t + 2T$ für t, also $u + 2K$ für u, so bleibt das periodische Glied ungeändert, während das erste Glied um 2Φ wächst. Bezeichnet man daher mit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ die zur Zeit t stattfindenden Werthe der Winkel φ und ψ, so ist

$$\varphi(t + 2T) = 2\Phi + \varphi(t),$$

während gleichzeitig nach § 75

$$\psi(t + 2T) = \psi(t)$$

ist. Daraus erhellt, dass die Bahn des sphärischen Pendels aus fortwährend sich wiederholenden congruenten Theilen besteht, welche den Zeitintervallen

$$o \ldots 2T, \; 2T \ldots 4T, \; 4T \ldots 6T, \text{ etc.}$$

und den Winkelintervallen

$$o \ldots 2\Phi, \; 2\Phi \ldots 4\Phi, \; 4\Phi \ldots 6\Phi, \text{ etc.}$$

entsprechen. Wenn daher Φ in einem rationalen Verhältnisse zu π steht, so wird das Pendel, nachdem es eine Anzahl jener congruenten Theile durchlaufen hat, wieder zu dem Punct zurückgelangen, von welchem es ausgegangen ist; sind aber Φ und π incommensurabel, so erreicht das Pendel seinen Ausgangspunct niemals wieder.

Setzt man ferner $2T - t$ statt t, oder $2K - u$ statt u, so nimmt das periodische Glied den entgegengesetzten Werth an. Demnach ist

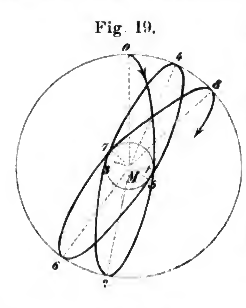
$$\varphi(2T - t) = 2\Phi - \varphi(t);$$

da nun gleichzeitig

$$\psi(2T - t) = \psi(t),$$

so besteht jeder der vorhin erwähnten congruenten Theile wiederum aus zwei congruenten Stücken, die jedoch eine entgegengesetzte Lage zu einander haben.

Fig. 19.



In Fig. 19 ist die Projection eines Theiles der Bahn des sphärischen Pendels auf eine Horizontalebene dargestellt. Die Puncte 0, 1, 2, 3, 4, etc. entsprechen den Zeiten

$$0, \; T, \quad 2T, \quad 3T, \quad 4T \ldots$$

den Winkeln

$$\psi = \alpha, = \beta, = \alpha, = \beta, = \alpha \ldots,$$

sodass

$$M0 = M2 = M4 = \ldots = r \sin \alpha,$$

$$M1 = M3 = M5 = \ldots = r \sin \beta;$$

endlich den Winkeln

$$\varphi = o, = \Phi, = 2\Phi, = 3\Phi, = 4\Phi = \ldots,$$

sodass

$$oM1 = 1M2 = 2M3 = 3M4 = \ldots = \Phi.$$

Von besonderer Wichtigkeit für die Kenntniss der Bewegung des sphärischen Pendels ist die Untersuchung, ob der Winkel Φ grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Es wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass er immer grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Damit ist dann zugleich gezeigt, dass der höchste Punct des sphärischen Pendels auf einem kleinen Kugelkreise in der Richtung der Bewegung vorwärts schreitet.

§ 77.

Wir gehen zunächst dazu über, dem Ausdrucke für den Winkel Φ

$$\Phi = PT + iKZ(ia_1) + iKZ(ia_2 + K)$$

eine reelle Form zu geben. Dazu dienen die Formeln (1) und (8) des § 69. (S. 276 und 278.)

$$iZ(iu) = -\operatorname{tg} am(u, k')\, \Delta\, am(u, k') + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u, k')$$

$$iZ(iu + K') = \frac{-k'^2 \sin am(u,k') \cos am(u,k')}{\Delta am(u,k')} + \frac{\pi u}{2KK'} + Z(u, k').$$

Mit ihrer Hülfe erhält man:

$$\Phi = PT - K \operatorname{tg} am(a_1, k') \Delta am(a_1, k') - \frac{Kk'^2 \sin am(a_2,k') \cos am(a_2,k')}{\Delta am(a_2,k')}$$
$$+ \frac{\pi(a_1 + a_2)}{2K'} + KZ(a_1, k') + KZ(a_2, k'),$$

und wenn man die beiden Functionen Z vermittelst des Additionstheoremes der zweiten Gattung ((6) § 64) vereinigt,

$$(34)\quad \Phi = PT - K \operatorname{tg} am(a_1,k') \Delta am(a_1,k') - \frac{Kk'^2 \sin am(a_2,k') \cos am(a_2,k')}{\Delta am(a_2,k')}$$
$$+ k'^2 K \sin am(a_1, k') \sin am(a_2, k') \sin am(a_1 + a_2, k')$$
$$+ \frac{\pi(a_1 + a_2)}{2K'} + KZ(a_1 + a_2, k').$$

Hierin kommt nun das Argument $a_1 + a_2$ vor. Die elliptischen Functionen desselben kann man mit Hülfe der Fundamentalformeln (25) § 27 aus den Formeln (30) ableiten. Man erhält dann:

$$\sin am(a_1 + a_2, k') = \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta}$$

$$\cos am(a_1 + a_2, k') = \frac{k}{k'} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta \sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta}$$

$$\Delta am(a_1 + a_2, k') = k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta},$$

welche Ausdrücke sich mit Hülfe der Relationen:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta + \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta = \frac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{2}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$$

auch in folgende umwandeln lassen:

$$(35)\quad \begin{cases} \sin am(a_1 + a_2, k') = \dfrac{k}{k'} \dfrac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} = \dfrac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha}} \\[2ex] \cos am(a_1 + a_2, k') = \dfrac{k}{k'} \dfrac{\sin\beta \cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin\beta \cos\alpha}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha}} \\[2ex] \Delta am(a_1 + a_2, k') = k \dfrac{\sin\alpha \cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha \cos\beta}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta}}. \end{cases}$$

Drückt man nun mit Hülfe dieser Formeln und der Formeln (30) alle in (34) vorkommenden elliptischen Functionen von a_1, a_2

und $a_1 + a_2$ durch α und β aus und vereinigt diese Ausdrücke mit dem ersten Gliede PT, welches nach (32) den Werth

$$PT = \frac{2kK\sin\beta}{\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}$$

hat, so erhält man Φ in seiner einfachsten reellen Gestalt folgendermassen:

$$(36)\quad \Phi = \frac{kK\sin\beta\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1 + a_2)}{2K'} + KZ(a_1 + a_2, k'),$$

worin man dem ersten Gliede auch die Form

$$k'K \operatorname{tg}\alpha \cos am (a_1 + a_2, k')$$

geben kann. Daraus ergiebt sich auch sofort eine Reihenentwickelung für Φ, wenn man die (13) § 60 gegebene Reihe für die Transcendente Z

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

anwendet, nämlich

$$\Phi = \frac{kK\sin\beta\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'}$$

$$+ \frac{2\pi K}{K'}\left\{\frac{q'}{1-q'^2}\sin\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} + \frac{q'^2}{1-q'^4}\sin\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'}\right.$$

$$\left. + \frac{q'^3}{1-q'^6}\sin\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} + \ldots\right\}.$$

Benutzt man hingegen die aus der Jacobi'schen Function hervorgehende Reihe (§ 65 S. 261), nämlich

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\,\frac{q\sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4\sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9\sin\frac{3\pi u}{K} - \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots},$$

so erhält man

$$\Phi = \frac{kK\sin\beta\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'}$$

$$+ \frac{2\pi K}{K'}\,\frac{q'\sin\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} - 2q'^4\sin\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'} + 3q'^9\sin\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} - \ldots}{1 - 2q'\cos\frac{\pi(a_1+a_2)}{K'} + 2q'^4\cos\frac{2\pi(a_1+a_2)}{K'} - 2q'^9\cos\frac{3\pi(a_1+a_2)}{K'} + \ldots}.$$

§ 78.

Der im vorigen § ermittelte Ausdruck für Φ soll nun auch dazu benutzt werden, die Natur dieses Winkels näher zu untersuchen, indem gezeigt werden soll, einmal, dass er immer gleich oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, und zweitens, dass er, wenn ein bestimmter Werth von α festgehalten wird, desto grösser ist, je grösser β angenommen wird.

Suchen wir, um dieses zu zeigen, zuerst den Werth des Ausdrucks (36)

$$(37)\quad \Phi = k'K \operatorname{tg}\alpha \cos am\,(a_1 + a_2, k') + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2K'} + KZ\,(a_1 + a_2, k')$$

für $\beta = o$ auf, so ergiebt sich, weil aus den Formeln (35) $a_1 + a_2 = K'$ für $\beta = o$ folgt, und $Z\,(K', k') = o$ ist (§ 60. S. 235), alsdann

$$\Phi = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn nun gezeigt werden kann, dass bei constant angenommenem α der Differentialquotient

$$\frac{d\Phi}{d\beta}$$

immer einen positiven Werth besitzt, so werden damit die obigen Behauptungen erwiesen sein. Es könnte als ein Widerspruch erscheinen, dass wir hier für Φ den Werth $\frac{\pi}{2}$ bei verschwindendem β finden, während wir früher im § 76 sahen, dass in diesem Falle der Winkel φ den Werth Null hat. Allein es kann leicht gezeigt werden, dass das im Allgemeinen periodische Glied des Ausdrucks (33) von φ für $\beta = o$ den Werth $-\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}$ annimmt. Da nämlich, wie wir schon § 76 sahen, alsdann

$$a_1 = o, \qquad a_2 = K'$$

ist, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{\Phi}{T}\,t + \tfrac{1}{2}\,i\,\log\frac{\Theta(u-(K+iK'))}{\Theta(u+(K+iK'))};$$

aus der Formel

$$\Pi(u, a) = u\, Z(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

aber erhält man, weil $\Pi(u, K + iK') = o$ ist, (§ 20. S. 72)

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-(K+iK'))}{\Theta(u+(K+iK'))} = -\, u\, Z(K + iK')$$

$$= \frac{i\pi}{2K}\, u,$$

wie aus der Formel (4) (§ 69. S. 277) für $Z(u + iK')$ leicht gefolgert werden kann. Demnach ist in der That, wenn noch für u sein Werth $\frac{Kt}{T}$ substituirt wird,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \frac{t}{T} = o.$$

Um den Differentialquotienten $\frac{d\Phi}{d\beta}$, auf dessen Zeichen alles ankommt, zu entwickeln, müssen wir zuerst dem Ausdrucke (37) eine etwas andere Gestalt geben. Führt man statt der Function Z die Function E ein, indem nach Formel (14) (§ 60. S. 234).

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}\, u,$$

also auch

$$Z(a_1 + a_2, k') = E(a_1 + a_2, k') - \frac{E'}{K'}(a_1 + a_2)$$

ist, so erhält man

$$\Phi = k'K \operatorname{tg} \alpha \cos am(a_1 + a_2, k') + \frac{a_1 + a_2}{K'}\left(\frac{\pi}{2} - KE'\right)$$
$$+ KE(a_1 + a_2, k'),$$

und wenn man die im § 68 bewiesene Relation

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

anwendet,

$$\Phi = k'K \operatorname{tg} \alpha \cos am(a_1 + a_2, k') + (a_1 + a_2)(E - K)$$
$$+ KE(a_1 + a_2, k').$$

Hierin ersetzen wir nun das Argument $a_1 + a_2$ durch die Amplitude, indem

$$am(a_1 + a_2, k') = \sigma$$

sei, dann wird mit Anwendung der Legendre'schen Bezeichnung

$$\Phi = k'K \operatorname{tg} \alpha \cos \sigma + (E - K)\, F(\sigma, k') + KE_1(\sigma, k').$$

Dieser Ausdruck soll nun vollständig nach β differentiirt, α aber als constant betrachtet werden. Dann kann man setzen

$$(38) \quad \ldots \quad \frac{d\Phi}{d\beta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\beta} + \frac{\partial\Phi}{\partial(k'^2)}\frac{d(k'^2)}{d\beta},$$

indem man bei der Differentiation nach k'^2 zugleich auf die Veränderlichkeit von K und E Rücksicht nimmt, und zeigen, dass beide Glieder des vorstehenden Ausdrucks positiv sind.

Aus den Gleichungen (35) folgt

$$\sigma = am\,(a_1 + a_2, k') = \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

Durch Differentiation nach β erhält man daraus

$$\frac{d\sigma}{d\beta} = -\frac{k^2}{k'^2}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha};$$

differentiirt man ebenso

$$k'^2 = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta},$$

so erhält man

$$\frac{d(k'^2)}{d\beta} = 2\sin\beta\,\frac{\cos^2\alpha\,(\cos\alpha + \cos\beta) + \cos\beta\,(1 + \cos\alpha\cos\beta)}{(1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta)^2};$$

dieser Ausdruck ist immer positiv.

Nun erhält man ferner

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -k'K\operatorname{tg}\alpha\sin\sigma - \frac{K-E}{\Delta(\sigma,k')} + K\Delta\,(\sigma, k');$$

substituirt man darin die (35) gegebenen Ausdrücke für $\sin\sigma$ und $\Delta\,(\sigma, k')$, so findet man

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -\frac{kK\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} - \frac{(K-E)\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta}.$$

Nun ist $K - E$ eine positive Grösse, denn drückt man dieselbe durch ihre Integrale aus, so ist

$$K - E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi\;d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

mithin positiv, weil die unter dem Integralzeichen stehende Function innerhalb der Integrationsgrenzen nur positive und endliche Werthe annimmt. Wenn daher $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, so wird sowohl $\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}$ als auch $\frac{d\sigma}{d\beta}$ negativ, also das Product $\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\beta}$ positiv. Ist da-

gegen $\alpha > \frac{\pi}{2}$, so kann man dasselbe Product in folgende Gestalt bringen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{k^2}{k'^2(\cos\beta - \cos\alpha)}\left\{K\frac{k\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} + (K - E)\frac{\cos\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta}\right\}$$

$$= \frac{k^2}{k'^2(\cos\beta - \cos\alpha)}\left\{\frac{K(\cos\beta + \cos\alpha)(1 + \cos\alpha\cos\beta)}{\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}} - E\frac{\cos\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{k\sin\alpha\cos\beta}\right\},$$

in welcher das erste Glied immer, und das zweite Glied gerade dann positiv ist, wenn $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist. Demnach ist erwiesen, dass das erste Product des Ausdrucks (38) immer einen positiven Werth hat.

Die Differentiation nach k'^2 liefert

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (k'^2)} = \frac{K\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\sigma}{2k'} + k'\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\sigma\frac{dK}{d(k'^2)} + F(\sigma, k')\frac{d(E - K)}{d(k'^2)}$$

$$+ (E - K)\frac{\partial F(\sigma, k')}{\partial (k'^2)} + E_1(\sigma, k')\frac{dK}{d(k'^2)} + K\frac{\partial E_1(\sigma, k')}{\partial (k'^2)}.$$

Zur Reduction dieses Ausdrucks benutze man die in § 68 abgeleiteten Formeln

$$\frac{dK}{d(k'^2)} = \frac{K}{2k^2} - \frac{E}{2k^2k'^2}; \qquad \frac{d(E - K)}{d(k'^2)} = \frac{E}{2k'^2}$$

$$= -\frac{K}{2k'^2} + \frac{K - E}{2k^2k'^2} \qquad\qquad = \frac{K}{2k'^2} - \frac{K - E}{2k'^2},$$

ferner

$$\frac{\partial F(\sigma, k')}{\partial (k'^2)} = \frac{E_1(\sigma, k')}{2k^2k'^2} - \frac{F(\sigma, k')}{2k'^2} - \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{2k^2\Delta(\sigma, k')}$$

$$\frac{\partial E_1(\sigma, k')}{\partial (k'^2)} = \frac{E_1(\sigma, k') - F(\sigma, k')}{2k'^2}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke und ordnet nach den Factoren K und $K - E$, so heben sich die in K multiplicirten Glieder auf, und die anderen geben

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (k'^2)} = \frac{(K - E)\sin\beta}{2kk'^2\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck ist nun stets positiv, ebenso war es auch $\frac{d(k'^2)}{d\beta}$, folglich hat auch das zweite Product $\frac{\partial\Phi}{\partial(k'^2)}\frac{d(k'^2)}{d\beta}$ und somit $\frac{d\Phi}{d\beta}$ stets einen positiven Werth.

Da nun der Winkel Φ für $\beta = o$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat und wegen des stets positiven Differentialquotienten $\frac{d\Phi}{d\beta}$ mit wachsendem β ebenfalls wächst, so ist Φ nicht allein stets gleich oder grösser als $\frac{\pi}{2}$, sondern auch desto grösser, je grösser bei festgehaltenem α der Winkel β angenommen wird. Hieraus ist alsdann ersichtlich, dass das sphärische Pendel bei jeder Schwingung einen Ausschlag nach der Seite der Bewegungsrichtung hin macht, und dass dieser Ausschlag desto grösser ausfällt, je grösser die kleinste Ablenkung von der Verticallinie im Vergleich zur grössten Ablenkung ist.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Ueber Functionen einer complexen Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale.

---

§ 79.

Unter einer complexen Grösse versteht man eine Grösse von der Form

$$x + iy,$$

in welcher x und y reell, und $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Bezeichnung complex in dieser engeren Bedeutung ist erst seit Gauss in Aufnahme gekommen; früher verstand man darunter jeden irgendwie aus ungleichartigen Theilen bestehenden Ausdruck. Setzt man

$$x + iy = z,$$

und nimmt man x und y als stetig veränderlich an, so nennt man z eine stetig veränderliche complexe Grösse.

Als das geometrische Bild einer reellen Veränderlichen betrachtet man bekanntlich einen auf einer festen Geraden (der Abscissenaxe) sich bewegenden Punct, indem jeder reelle Werth der Veränderlichen durch den Abstand des beweglichen Punctes von einem festen Puncte (dem Nullpuncte) dargestellt wird. Als das geometrische Bild einer complexen Variablen betrachtet man dagegen einen auf beliebige Weise in der Ebene beweglichen Punct, und zwar so, dass in jeder Lage desselben die Werthe der beiden reellen Variabeln x und y, von denen der Werth der complexen Variablen z abhängt, durch die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes dargestellt werden. Danach wird durch jeden reellen Werth von z (bei welchem also $y = o$) ein Punct der Abscissenaxe, durch jeden rein imaginären Werth, d. h. durch jeden Werth von der Form iy (bei welchem also $x = o$), aber ein Punct der Ordinatenaxe bestimmt. Ferner entspricht jedem beliebigen Werthe von z irgendwo ein Punct in der Ebene, und umgekehrt kann zu jedem gegebenen Puncte der entsprechende Werth von z gefunden werden. Giebt man der complexen Variablen die Form

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so stellt der Modul r die Entfernung des Punctes vom Nullpuncte (den Radius Vector des Puncts), und φ die Neigung des letzteren gegen die Abscissenaxe dar. Man kann daher auch sagen, dass durch eine complexe Grösse eine gerade Linie ihrer Länge und Richtung nach dargestellt wird, nämlich die von dem Nullpuncte zu dem darstellenden Puncte führende Gerade, oder auch jede der letzteren gleiche und mit ihr direct parallele Gerade.

Daraus ergiebt sich leicht, dass die Summe zweier complexen Grössen

$$z_2 + z_1 = x_2 + x_1 + i\,(y_2 + y_1)$$

diejenige Gerade darstellt, welche von dem Nullpuncte nach dem vierten Eckpuncte des Parallelogramms hinführt, dessen Seiten die durch z_1 und z_2 dargestellten Geraden sind. Ebenso erhellt leicht, dass die Differenz zweier complexen Werthe

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i\,(y_2 - y_1)$$

die Gerade $z_1 z_2$ ihrer Länge und Richtung nach (von z_1 nach z_2) darstellt.

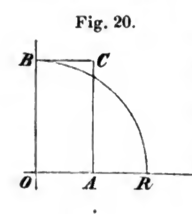
Da der Modul einer complexen Grösse die absolute Länge der durch die letztere dargestellten Geraden angiebt, so vertritt derselbe gleichsam die Stelle eines absoluten Werthes der complexen Grösse; wenn man daher mehrere complexe Werthe ihrer Grösse nach mit einander zu vergleichen hat, so muss man die Werthe ihrer Moduln dabei in Betracht ziehen.

Wenn die complexe Variable z eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe annimmt, so durchläuft der darstellende Punct eine in einem ununterbrochenen Zuge fortgehende Linie. Da die Veränderung von z durch zwei gänzlich von einander unabhängige Variable, x und y oder r und φ, bestimmt wird, so kann man sich die Veränderung von z in jeder beliebigen Linie vor sich gehend denken. Dabei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass es zur Stetigkeit der Veränderung von z durchaus nicht nothwendig ist, dass die von dem beweglichen Puncte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei, sie kann vielmehr beliebig aus verschiedenen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt sein. Damit die Veränderung von z stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dass die Linie einen ununterbrochenen Zug bilde. Es scheint für das Folgende nützlich zu sein, dieses an einigen Beispielen näher zu erläutern. Denken wir uns, die Variable z beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = o$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu dem Werthe ib, welcher durch den Punct B (Fig. 20) auf der Ordinatenaxe dargestellt werden möge, indem die Entfernung $OB = b$ sei. Dann kann die Variable z (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punct, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen z darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von O nach B gelangen. *Erstlich* möge sie die gerade Linie OB durchlaufen, dann bleibt x constant $= o$, während y nach und nach alle reellen Werthe von o bis b annimmt. *Zweitens* durchlaufe die Variable z die aus den drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $OACB$, bei welcher $OA = a$ sei. Dann ist y

Fig. 20.

von O bis A constant $= o$, und x wächst von o bis a; alsdann bleibt x auf dem Wege AC bei dem erlangten Werth a stehen, und y wächst von o bis b, endlich bleibt von C bis B nun y constant $= b$, und x nimmt von a bis o ab. Drittens möge die Variable z zuerst auf der Abscissenaxe von O bis R fortgehen (wo $OR = b$) und dann den Kreisbogen RB beschreiben. Setzt man für diesen Fall

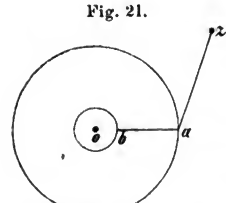
Fig. 20.



$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ist auf OR zuerst φ constant $= o$, und r wächst von o bis b, alsdann bleibt r auf RB constant $= b$, und φ wächst von o bis $\frac{\pi}{2}$. Untersuchen wir als ein letztes Beispiel noch den Gang der reellen Veränderlichen, während der bewegliche Punct folgenden Weg beschreibt: Er gehe zuerst von einem Puncte a auf der Abscissenaxe bis zu einem in der Nähe des Nullpunctes o liegenden Puncte b (Fig. 21), beschreibe dann einen ganzen Kreis um o mit dem Halbmesser $ob = \varrho$ und kehre wieder von b nach a zurück. Es sei $oa = a$; setzt man $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist während des Weges ab die Variable φ constant $= o$, und r nimmt von a bis ϱ ab. Alsdann bleibt während des Durchlaufens der Peripherie des Kreises r constant $= \varrho$, und φ wächst von o bis 2π (wird der Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so nimmt φ von o bis -2π ab). Endlich, während die Variable von b nach a zurückkehrt, bleibt φ constant $= 2\pi$, und r wächst wieder von ϱ bis a.

Fig. 21.



Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer complexen und einer reellen Variablen ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Variable annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mitbestimmt ist, ist dies bei einer complexen Variablen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig aufeinander folgender Werthe, welche

von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem anderen bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt heisst dies: Eine reelle Variable kann nur auf einem einzigen Wege von einem Werthe zu einem anderen gelangen, nämlich nur auf dem zwischen den beiden entsprechenden Puncten liegenden Stücke der Abscissenaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Werthe zu einem anderen gehen lassen.

§ 80.

Es sei $u = f(z)$ eine Function der complexen Variablen $z = x + iy$. Da man eine solche wieder auf die Form einer complexen Grösse bringen kann, so wird man setzen können

$$u = X + iY,$$

worin X und Y reelle Functionen von x und y bedeuten. Allein auf dieselbe Form kann man auch jede imaginäre oder reelle Function von x und y bringen, auch wenn in ihr x und y nicht gerade einzig und allein in der Verbindung $x + iy$ enthalten sind; und es leuchtet ein, dass nicht jede Function von x und y zugleich eine Function von z, d. h. eine Function von x und y in der bestimmten Verbindung $x + iy$ ist. Z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$ sind nicht Functionen von $x + iy$, obwohl sie Functionen von x und y sind. Wir haben daher zunächst die Bedingungen aufzusuchen, welchen X und Y genügen müssen, damit

$$u = X + iY$$

wirklich eine Function von z, d. h. von $x + iy$ sei.

Denken wir uns zunächst an Stelle der imaginären Einheit i eine beliebige reelle Constante a gesetzt, nehmen wir also an, es sei

$$z = x + ay,$$

und untersuchen wir, wann u eine Function von z ist.

Man hat offenbar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a$$

ist,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a\,\frac{du}{dz}.$$

Demnach erhält man

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

als die Bedingung dafür, dass u eine Function von $x + ay$ sei.

Untersuchen wir nun, welche Folgerungen sich ergeben, wenn wir diese Betrachtung auf den Fall übertragen, dass die imaginäre Einheit i an die Stelle von a tritt. Da $u = X + iY$ gesetzt war, so erhält man aus der letzten Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

welche complexe Gleichung sogleich in die beiden reellen Gleichungen

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\,\frac{\partial Y}{\partial x}$$

zerfällt. Dieses sind schon die Bedingungen, welchen die Functionen X und Y genügen müssen, damit $u = X + iY$ eine Function von $z = x + iy$ sei. Allein wir können daraus noch eine andere wichtige Folgerung ziehen. Bildet man nämlich die Derivirte $\frac{du}{dz}$; so erhält man

$$\frac{du}{dz} = \frac{dX + i\,dY}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy\right)}{dx + i\,dy}$$

$$= \frac{\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In Folge der Gleichungen (1) aber verwandelt sich dies in

$$\frac{du}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(1 + i\,\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\,\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x},$$

oder auch in

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\left(1 + i\,\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\,\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

was wieder mit den Bedingungsgleichungen

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

übereinstimmt. Dies zeigt nun, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ unabhängig ist. Um die Bedeutung davon einzusehen, erinnern wir uns, dass die Veränderung der Variablen z auf einem beliebigen Wege vor sich gehen kann. Nehmen wir nun an, es geschehe dies auf irgend einer Curve, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$y = \varphi\,(x)$$

sei, dann giebt der Werth des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ die Richtung dieser Curve im Puncte z an. Wenn nun die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig ist, so heisst dies, dass sie für jeden Weg, den die Variable z einschlagen mag, denselben Werth hat; mit anderen Worten, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von der Art, in welcher die Variable z sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Function einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht in Betracht, weil diese Veränderung eben nur auf eine einzige Art vor sich gehen kann. Bei Functionen von einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grosse Rolle, und es ist daher von grosser Wichtigkeit zu zeigen, dass die Derivirte einer Function einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist.

Nun leuchtet aber auf der anderen Seite ein, dass, wenn dieses nicht der Fall wäre, der Begriff der Derivirten bei complexen Variabeln gar nicht bestimmt sein würde, wenigstens nicht in der Weise bestimmt, wie bei reellen Variabeln*); da-

*) Bei reellen Veränderlichen ist die Derivirte unabhängig von dem unendlich kleinen Zuwachs der Variablen. Soll dasselbe auch bei complexen Variabeln stattfinden, so muss die Derivirte nicht allein von der Länge, sondern auch von der Richtung der unendlich kleinen, durch dz dargestellten Linie unabhängig sein; und dieses letztere wird durch die Unabhängigkeit von $\frac{dy}{dx}$ erreicht.

her hat Riemann *) diese Bedingung der Unabhängigkeit der Derivirten von dem Werthe des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ als Definition einer Function von einer complexen Variablen aufgestellt, und es soll nun noch in der Kürze gezeigt werden, dass man hievon ausgehend auch zu den nämlichen Bedingungsgleichungen (1) gelangt. Wir haben oben unter (2) schon den vollständigen Ausdruck für die Derivirte $\frac{du}{dz}$ ermittelt. Multiplicirt man beiderseits mit $1 + i\frac{dy}{dx}$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{du}{dz} - \frac{\partial X}{\partial x} - i\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(i\frac{du}{dz} - \frac{\partial X}{\partial y} - i\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

welche zufolge der gemachten Forderung von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig sein muss. Es muss daher für sich

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \text{und} \quad i\frac{du}{dz} = \frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}$$

sein. Hieraus fliessen dann wieder wie oben die beiden Bedingungen

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Hienach ist also, wenn $u = X + iY$ eine Function von $z = x + iy$ sein soll, keine der Functionen X und Y ganz willkürlich. Vielmehr findet man durch nochmalige Differentiation der vorigen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0,$$

dass also beide Functionen der nämlichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen.

Die vorstehende Bedingung enthält eine interessante geometrische Beziehung, die noch kurz erwähnt werden möge. Ebenso wie durch jeden Werth der Variablen $z = x + iy$ die Lage eines Punctes in der Ebene bestimmt ist, wird auch durch jeden Werth

*) Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inaug.-Diss.) Göttingen 1851.

Cauchy bezeichnet $X + iY$ auch dann als Function von $x + iy$, wenn nur X und Y reelle Functionen von x und y sind; wenn die obige Bedingung erfüllt ist, nennt er die Function monogen. (Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome IV. p. 346.)

der Function $u = X + iY$ die Lage eines Punctes in derselben oder in einer anderen Ebene bestimmt, indem X und Y die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punctes sind. Wenn u eine Function von z ist, so ist die Lage des Punctes u von der Lage des Punctes z abhängig, und beschreibt der bewegliche Punct z eine Curve, so wird auch der Punct u eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben.

Wir wollen nun die Beziehung aufsuchen, in welcher zwei solche Curven stehen müssen, wenn die Bedingung, dass die Derivirte $\frac{du}{dz}$ von $\frac{dy}{dx}$, d. h. von der Grösse und Richtung von dz unabhängig ist, erfüllt sein soll.*)

Fig. 22.

Es seien z' und z'' (Fig. 22) zwei unendlich nahe an einem dritten Puncte z gelegene Puncte, und man setze die unendlich kleinen Verbindungslinien

$$zz' = dz', \quad zz'' = dz''.$$

Fig. 23.

Ferner seien u, u', u'' (Fig. 23) die den Puncten z, z', z'' entsprechenden Puncte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

$$uu' = du', \quad uu'' = du''.$$

Dann besteht die obige Bedingung darin, dass

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{du''}{dz''} \quad \text{oder} \quad \frac{du'}{du''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein muss.

Setzt man aber

$$dz' = zz' = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$
$$du' = uu' = \varrho' (\cos \psi' + i \sin \psi'),$$
$$dz'' = zz'' = r'' (\cos \varphi'' + i \sin \varphi'')$$
$$du'' = uu'' = \varrho'' (\cos \psi'' + i \sin \psi''),$$

*) Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. S. 3.

so folgt

$$\frac{\varrho'}{\varrho''}(\cos(\psi' - \psi'') + i\sin(\psi' - \psi''))$$
$$= \frac{r'}{r''}(\cos(\varphi' - \varphi'') + i\sin(\varphi' - \varphi'')),$$

also

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{r'}{r''}, \quad \text{und} \quad \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi'';$$

in den Dreiecken $z\,z'\,z''$ und $u\,u'\,u''$ sind also die Winkel $z'\,z\,z''$ und $u'\,u\,u''$ einander gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional; die beiden Dreiecke sind also ähnlich. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Puncte, z und u, stattfinden muss, so ist die von dem Puncte u beschriebene Figur der von dem Puncte z beschriebenen in ihren kleinsten Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der u bilden denselben Winkel mit einander, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der z.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Function

$$u = \operatorname{tg} z.$$

Da $z = x + iy$ ist, so erhält man

$$u = \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} iy}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} iy},$$

und mit Berücksichtigung der Relation

$$\operatorname{tg} iy = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}$$

nach einer leichten Rechnung

$$(3) \qquad X = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}, \qquad Y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}$$

und

$$u = X + iY.$$

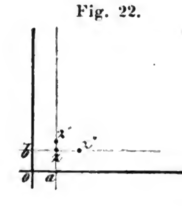


Fig. 22.

Zuerst lassen sich durch Differentiation dieser Ausdrücke die Bedingungsgleichungen (1) leicht verificiren. Nimmt man ferner an, der Punct z bewege sich auf einer der Abscissenaxe in der Entfernung b parallelen Geraden (Fig. 22), so ist y constant $= b$, während x veränderlich bleibt. Um nun die Curve zu finden, welche der Punct

u beschreibt, während z in der angegebenen Weise sich bewegt, hat man nur in den Ausdrücken (3) $y = b$ zu setzen und x zu eliminiren. Dann erhält man zwischen den rechtwinkligen Coordinaten X und Y des Punctes u die Gleichung

$$(M) \quad \ldots \quad X^2 + Y^2 - 2\,\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}\,Y + 1 = 0,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist, dessen Mittelpunct M (Fig. 23) auf der Ordinatenaxe in der Entfernung

$$\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}$$

vom Anfangspuncte liegt, und dessen Radius ϱ

$$\varrho = \pm\,\frac{2}{e^{2b} - e^{-2b}}$$

ist. Lässt man ferner den Punct z sich auf einer der Ordinatenaxe in der Entfernung a parallelen Geraden bewegen (Fig. 22), so findet man die entsprechende Curve für den Punct u, wenn man in (3) $x = a$ setzt und y eliminirt. Dann ergiebt sich die Gleichung

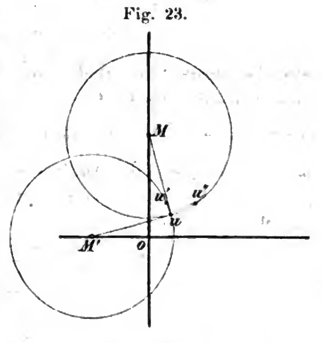
$$(M') \quad \ldots \quad X^2 + Y^2 + 2\cot 2a\; X - 1 = 0,$$

welche ebenfalls einen Kreis darstellt, dessen Mittelpunct M' (Fig. 23) auf der Abscissenaxe in der Entfernung $-\cot 2a$ vom Anfangspuncte liegt und den Radius ϱ'

$$\varrho' = \pm\,\frac{1}{\sin 2a}$$

hat.

Fig. 23.



Wenn also der Punct z sich auf zwei einander rechtwinklig durchschneidenden, den Coordinatenaxen parallelen Geraden bewegt, so bewegt sich der Punct u auf zwei Kreisen, deren Mittelpuncte auf den Coordinatenaxen liegen. Nach der obigen allgemeinen Betrachtung aber müssen, weil die Geraden rechtwinklig aufeinander stehen, auch die Kreise sich rechtwinklig durch-

schneiden. Dies zu verificiren ist nicht schwer, da man leicht zeigen kann, dass die aus dem Mittelpuncte jedes Kreises an den anderen Kreis gezogene Tangente dem Radius des ersten Kreises gleich ist. Man erhält bekanntlich das Quadrat der aus einem beliebigen Puncte an einen Kreis gelegten Tangente, wenn man in den linken Theil der auf Null gebrachten und durch den Coefficienten von X^2 und Y^2 dividirten Gleichung des Kreises die Coordinaten des Punctes, aus dem die Tangente gelegt werden soll, substituirt. Nun sind die Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises (M)

$$o \quad \text{und} \quad \frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}$$

Substituirt man diese Werthe in den linken Theil der Gleichung (M′), so erhält man

$$\left(\frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{\left(e^{2b} - e^{-2b}\right)^2},$$

und dies ist in der That das Quadrat des Radius ϱ. Ebenso sind die Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises (M') resp. $-\operatorname{cotg} 2a$ und o. Diese in den linken Theil der Gleichung (M) substituirt, geben für das Quadrat der Tangente

$$\operatorname{cotg}^2 2a + 1 = \frac{1}{\sin^2 2a},$$

also das Quadrat des Radius ϱ'. Die beiden Kreise durchschneiden sich daher in der That rechtwinklig. Nimmt man, wie es in der Figur geschehen ist, a positiv und $< \frac{\pi}{4}$, und b ebenfalls positiv an, so werden die Ausdrücke von X und Y für $x = a$ und $y = b$ beide positiv, daher entspricht dem Puncte z der Punct u. Man erhält ferner

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 4 \cdot \frac{\left(e^{2y} + e^{-2y}\right) \cos 2x + 2}{\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x\right)^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 4 \cdot \frac{\left(e^{2y} - e^{-2y}\right) \sin 2x}{\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x\right)^2}.$$

Da diese Ausdrücke in der Nähe des Punctes u ebenfalls positiv sind, so wachsen in dem Kreise M mit wachsendem x sowohl X als auch Y; und da ferner

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

so nimmt im Kreise M' die Abscisse X mit wachsendem y ab, während Y wächst. Wenn daher der Punct z nach z' geht, so geht u nach u'; geht aber z nach z'', so bewegt sich u nach u''. Die Figuren machen ferner anschaulich, dass die ziemlich nahe bei einander liegenden Puncte z, z', z'' ein Dreieck einschliessen, welches dem von den entsprechenden Puncten u, u', u'' gebildeten Dreiecke nahezu ähnlich ist.

§ 81.

Wenn eine Function vollkommen eindeutig ist, d. h. wenn jedem Werthe der Veränderlichen nur ein einziger Werth der Function entspricht, wie bei den algebraischen rationalen, den Exponential- und trigonometrischen Functionen, so muss offenbar der Werth, den die Fnnction in irgend einem Puncte z (d. h. für irgend einen Werth der Variablen z) erhält, ganz unabhängig sein von dem Wege, auf welchem die Variable zu jenem Puncte gelangt ist; denn wäre dies nicht, so müsste die Function für denselben Werth der Variablen verschiedene Werthe annehmen können. Anders aber verhält sich die Sache bei den zwei- und mehrdeutigen Functionen. Bei diesen ist in der That der Weg, auf welchem die Variable zu einem Puncte gelangt, von Einfluss auf den Werth, welchen die Function in diesem Puncte annimmt. Ob nämlich eine zwei- oder mehrdeutige Function diesen oder jenen ihrer Werthe in irgend einem Puncte erhält, hängt ab: erstens von dem Werthe, den man der Function im Ausgangspuncte der Veränderlichen giebt, und zweitens von der Beschaffenheit des Weges, auf welchem die Veränderliche von dem Ausgangspuncte zu dem zu untersuchenden Puncte hingeht. Es kommt dabei darauf an, ob zwei Wege, welche von einem Puncte z_0 zu einem anderen Puncte z hinführen, gewisse Puncte, die wir mit Cauchy*) ausgezeichnete Puncte (*points singuliers*) nennen wollen, einschliessen oder nicht. Diese Puncte sind solche, in welchen entweder die Function unendlich oder unstetig wird,

---

*) Cauchy. Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome IV. p. 327.

oder in welchen zwei oder mehrere, im Allgemeinen verschiedene, Werthe der Function einander gleich werden. Nehmen wir z. B. die Function

$$u = c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

so besitzt sie im Allgemeinen zwei Werthe für jeden Werth von z, nämlich

$$c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \quad \text{und} \quad c - \sqrt{\frac{z-a}{z-b}};$$

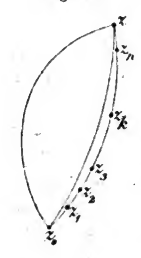
für den speciellen Werth $z = a$ (oder in dem Puncte $z = a$) aber fallen diese beiden Werthe in den einen $u = c$ zusammen; ausserdem wird die Function für $z = b$ unendlich und unstetig; daher sind

$$z = a \quad \text{und} \quad z = b$$

die beiden ausgezeichneten Puncte für diese Function.

Wir setzen voraus, dass die ausgezeichneten Puncte einer zu untersuchenden Function discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche, Puncte sind, und nehmen ferner an, dass die verschiedenen Werthe, welche die Function in einem und demselben Puncte z annehmen kann, um endliche Grössen von einander verschieden sind, so lange der Punct z einem ausgezeichneten Puncte nicht unendlich nahe liegt. Betrachtet man nun zwei einander unendlich nahe liegende Wege, welche von einem Puncte z_0 zu einem anderen Puncte z führen (Fig. 24), ohne durch einen ausgezeichneten Punct hindurch zu gehen, so kann man zeigen, dass eine Function auf beiden Wegen in z denselben Werth erhält, wenn sie von dem Puncte z_0 beide Male mit demselben Werthe ausgeht *). Stellen wir uns vor, zwei bewegliche Puncte durchliefen die beiden Wege in der Art, dass sie gleichzeitig z_0 verlassen, gleichzeitig in z ankommen und stets einander unendlich nahe bleiben. Es seien $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die stetig auf einander

Fig. 24.



*) Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques. (Liouville. Journal de mathématiques. Tome XV. p. 370.) Von dieser schönen Abhandlung ist ganz kürzlich eine deutsche Bearbeitung von H. Fischer erschienen, unter dem Titel: „V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen". Halle, 1861.

folgenden Werthe, welche die Function in den stetig aufeinander folgenden Puncten $z_1, z_2, z_3, \ldots$ des einen Weges annimmt, $v_1, v_2, v_3, \ldots$ die ebenfalls stetig aufeinander folgenden Werthe der Function auf dem anderen Wege, sodass je zwei Werthe u_k, v_k zweien unendlich nahen Puncten der beiden Wege angehören. Da ein ausgezeichneter Punct nicht überschritten wird, so bleibt u_k stets um eine endliche Grösse von einem anderen Werth, den die Function in dem nämlichen Puncte z_k haben kann, verschieden; man kann daher eine endliche Grösse p angeben, so beschaffen, dass der Modul*) der Differenz zwischen u_k und einem anderen Werthe der Function in dem nämlichen Puncte z_k an allen Stellen des Weges grösser als p bleibt. Da die Puncte, in welchen die Function die Werthe u_k und v_k besitzt, der Annahme nach unendlich nahe liegen, so kann auch der Modul der Differenz $u_k - v_k$ nur entweder unendlich klein oder grösser als p sein. Dagegen ist es nicht möglich, dass der Modul dieser Differenz an irgend einer Stelle endlich und zugleich kleiner als p ist. Wenn daher die Werthe u_k und v_k im Puncte z von einander verschieden wären, so müsste der Modul der Differenz $u_k - v_k$ irgendwo plötzlich von einem unendlich kleinen Werthe zu einem endlichen Werthe, der grösser als p ist, überspringen. Allein da nirgends ein ausgezeichneter Punct überschritten wird, so ist u auf seinem Wege stetig, ebenso v, also muss es auch die Differenz $u - v$ sein. Dieselbe muss daher fortwährend unendlich klein bleiben, und, wie sie im Puncte z_0 Null ist, auch im Puncte z wieder Null werden.

Es erhellt sogleich, dass dieser Beweis seine Kraft verliert, wenn die beiden Wege einen ausgezeichneten Punct überschreiten; denn dann wird entweder die Function unstetig, oder die verschiedenen Werthe der Function in dem nämlichen Puncte nähern sich einander in der Nähe des ausgezeichneten Punctes, sodass der Unterschied $u_k - v_k$ der Functionswerthe in zwei unendlich nahen Puncten der beiden Wege beliebig kleine endliche Werthe annehmen kann. Würde z. B. in der so eben betrachteten Function

$$u = c + \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

der Punct $z = b$ überschritten, so würde die Function eine Un-

*) Vgl. die Bemerkung auf S. 319.

terbrechung der Stetigkeit erleiden; würde aber der Punct $z = a$ überschritten, so würde der Unterschied der beiden Werthe $c + \varepsilon$ und $c - \varepsilon$, welche die Function in einem nahe an a liegenden Puncte annehmen kann, also 2ε, beliebig klein gemacht werden können, wenn man die Variable nur nahe genug an den Punct a herangehen, d. h. den Modul von $z - a$ klein genug werden lässt.

Denkt man sich jetzt eine Reihe aufeinander folgender und unendlich nahe aneinander liegender Wege, alle zwischen den Puncten z_0 und z, und so beschaffen, dass nirgend ein ausgezeichneter Punct überschritten oder von zwei Wegen eingeschlossen wird, so erhält die Function auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth im Puncte z. Daraus folgt dann: wenn man einen Weg zwischen zwei Puncten z_0 und z so durch allmälige Uebergänge in einen anderen Weg zwischen den nämlichen Puncten umformen kann, dass dabei ein ausgezeichneter Punct nicht überschritten wird, so erhält die Function in z auf dem zweiten Wege denselben Werth wie auf dem ersten. Fallen die Puncte z und z_0 zusammen, sodass der Weg eine geschlossene Linie bildet, so erhält die Function, wenn die Variable diese geschlossene Linie durchlaufen hat und zum zweitenmale nach z_0 kommt, in z_0 denselben Werth, den sie beim Ausgange von z_0 hatte, wenn man die geschlossene Linie durch allmälige Uebergänge auf den Punct z_0 reduciren kann, ohne einen ausgezeichneten Punct zu überschreiten.

Wir werden nun im nächsten § an einigen Beispielen sehen, wie der Werth einer mehrdeutigen Function sich ändert, wenn die Variable zwei Wege beschreibt, die nur mit Ueberschreitung eines ausgezeichneten Punctes in einander umgeformt werden können.

§ 82.

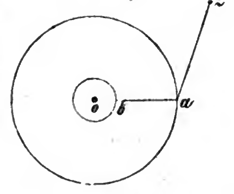
Betrachten wir als erstes Beispiel die Function

$$u = \sqrt{z};$$

dieselbe besitzt einen ausgezeichneten Punct $z = 0$; in diesem werden die beiden im Allgemeinen von einander verschiedenen Werthe $+\sqrt{z}$ und $-\sqrt{z}$ einander gleich, nämlich beide gleich 0. Nehmen wir an, die Veränderliche z gehe von dem Puncte $z = 1$

(a, Fig. 21) aus und durchlaufe die Peripherie eines aus dem Nullpunct als Mittelpunct beschriebenen Kreises; dann kann diese geschlossene Linie nicht auf den Punct $z = 1$ reducirt werden, ohne dass dabei der ausgezeichnete Punct $z = 0$ überschritten wird. Geht nun die Function $u = \sqrt{z}$ von dem Puncte $z = 1$ mit dem Werthe $u = +1$ aus, und setzt man

Fig. 21.



$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

so ist zuerst im Puncte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$; durchläuft dann z die Peripherie des Kreises in positiver Richtung, d. h. in der Richtung, in welcher der Winkel φ wächst, so bleibt r constant $= 1$, und φ nimmt von 0 bis 2π zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Puncte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i \sin 2\pi,$$

und folglich

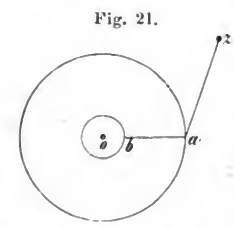
$$u = \sqrt{z} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

die Function hat also jetzt im Puncte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den anderen Werth -1 erhalten. Lässt man nun die Variable statt des Kreises irgend eine andere geschlossene, den Nullpunct umgebende Linie vom Puncte $z = 1$ aus beschreiben, so kann diese Linie durch allmälige Aenderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunct überschritten wird. Wenn also die Variable auf dieser Linie zum Puncte $z = 1$ zurückkehrt, so erhält die Function ebenfalls den Werth -1. Dies lässt sich auch direct einsehen, denn es ändert sich dabei nichts, als dass der Radius Vector r nicht mehr constant ist; derselbe kommt aber, nachdem er eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, im Puncte $z = 1$ wieder mit dem Werthe 1 an, und die Veränderung des Winkels φ ist die nämliche, wie bei dem Kreise.

Es gehe jetzt die Variable von dem Puncte $z = 1$, der in Fig. 21 durch a dargestellt ist, in einer geraden Linie nach einem beliebigen Puncte z; die Function $u = \sqrt{z}$, aus dem Puncte a mit dem Werthe $u = +1$ ausgehend, erlange auf diesem Wege in z den Werth U. Nun kann jeder von a nach z führende Weg, welcher den Nullpunct nicht umwindet, in die gerade

Linie az übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunct überschritten wird. Also erlangt auf jedem solchen Wege die Function u in z den Werth U. Lässt man dagegen die Variable zuerst eine geschlossene Linie um den Nullpunct herum beschreiben, dann nach a zurückkehren und jetzt erst von a nach z in gerader Linie gehen, so hat die Function $\sqrt{z}$ bei der Rückkehr nach a den Werth -1 erhalten, sie geht also nun von a mit dem Werthe -1 aus und erlangt demzufolge in z den Werth $-U$. In den so eben beschriebenen Weg lässt sich nun ohne Ueberschreitung des Nullpunctes jeder Weg umformen, welcher den Nullpunct einmal umwindet. Auf jedem solchen Wege erlangt also die Function im Puncte z den Werth $-U$. Auch dies kann man direct einsehen, wenn man bedenkt, dass der Winkel φ bei einer Umwindung des Nullpunctes in positiver Richtung den Werth $\theta + 2\pi$ annimmt, wenn mit θ der Werth von φ bezeichnet wird, den dieser Winkel auf der geraden Linie in z erreicht. Fragen wir uns nun noch, was aus der Function wird, wenn die von a ausgehende und den Nullpunct umgebende geschlossene Linie zweimal durchlaufen wird, so ist die Antwort leicht. Nimmt man statt der beliebigen Linie wieder den Kreis mit dem Halbmesser 1, und lässt man die Variable die Peripherie desselben zweimal hintereinander durchlaufen, so hat man schliesslich

Fig. 21.



$$z = \cos 4\pi + i \sin 4\pi,$$

also

$$u = \sqrt{z} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = +1;$$

die Function erreicht also dann wieder den ursprünglichen Werth. Hieraus geht nun hervor, dass es, übereinstimmend mit der bekannten Zweideutigkeit der Function $\sqrt{z}$, überhaupt nur zwei Klassen von Wegen giebt, auf welchen diese Function, von einem Puncte a mit einem bestimmten Werthe ausgehend, in einem anderen Puncte z verschiedene Werthe erhält. Als Repräsentant der einen Klasse kann die von a nach z führende gerade Linie angesehen werden; als Repräsentant der anderen Klasse hingegen dieselbe Gerade, welcher jedoch irgend eine, von a aus den Null-

punct umgebende, geschlossene Linie vorangeht. Wie diese geschlossene Linie beschaffen ist, ist gleichgültig, man könnte dazu den oben erwähnten Kreis nehmen, zweckmässiger aber, besonders der späteren Betrachtungen wegen, ist der schon auf S. 320 beschriebene Weg, bei welchem man die Variable von a in gerader Linie bis zu einem nahe an dem ausgezeichneten Nullpuncte liegenden Puncte b gehen, dann einen ganzen Kreis um den Nullpunct beschreiben und endlich von b nach a auf derselben geraden Linie zurückkehren lässt. Dass auch auf diesem Wege die Function $\sqrt{z}$ das Zeichen wechselt, folgt sogleich daraus, dass dieser Weg, ohne den Nullpunct zu überschreiten, in den Kreis mit dem Halbmesser 1 umgeformt werden kann; es ist aber leicht direct nachzuweisen. Setzt man nämlich wieder

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und bezeichnet mit ϱ den Halbmesser des kleinen Kreises, so ist zuerst φ constant $= 0$, und r nimmt von 1 bis ϱ ab; bei der ersten Ankunft in b hat also z den Werth $\varrho(\cos o + i\sin o)$, den entsprechenden Werth von $\sqrt{z}$ wollen wir mit $\varrho^{\frac{1}{2}}$ bezeichnen. Nun bleibt r constant $= \varrho$, und φ geht von 0 bis 2π; demnach ist bei der zweiten Ankunft in b

$$z = \varrho(\cos 2\pi + i\sin 2\pi),$$

also

$$u = \sqrt{z} = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\varrho^{\frac{1}{2}}.$$

In dem noch übrigen Theile des Weges bleibt φ constant $= 2\pi$, und r nimmt von ϱ bis 1 zu, daher kommt u mit dem Werthe -1 in a an. Wichtig ist es dabei, zu bemerken, dass der Radius ϱ des um den ausgezeichneten Punct beschriebenen Kreises beliebig klein genommen werden kann. Ja, es steht nichts im Wege, ihn bis ins Unendliche abnehmen zu lassen. In diesem Falle soll der so eben beschriebene Weg nach Puiseux*) eine Elementarcontur (*contour élémentaire*) genannt werden.

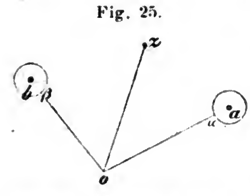
Zweites Beispiel. Die Function

$$u = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

*) Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques. (Liouville. Journ. de math. T. XV. p. 411.)

in welcher a und b zwei complexe Constanten bedeuten, hat zwei ausgezeichnete Puncte (Fig. 25), nämlich

Fig. 25.



$$z = a \quad \text{und} \quad z = b.$$

Wir nehmen an, die Function gehe von dem Puncte $z = 0$ mit dem Werthe $u = +\sqrt{\frac{a}{b}}$ aus, lassen zuerst die Variable die Elementarcontur um den Punct a durchlaufen und untersuchen, welchen Werth die Function bei der Rückkunft nach o erhält. Zu diesem Zwecke setze man

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

dadurch wird der Anfangspunct in den Punct a verlegt, die feste Richtung aber, von welcher die Winkel φ gezählt werden, bleibt ungeändert. Es sei φ_0 der Werth des Winkels φ in dem Endpuncte α des geradlinigen Theiles der Elementarcontur, der Radius des kleinen Kreises $= \varrho$, dann ist im Puncte α

$$z - a = \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),$$

und daher der entsprechende Werth von u, welcher mit u_0 bezeichnet werden möge,

$$u_0 = \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}{(a - b + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0))^{\frac{1}{2}}}.$$

Wird nun der kleine Kreis von der Veränderlichen durchlaufen, so erhält diese bei der Rückkehr nach α den Werth

$$z = a + \varrho(\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2\pi));$$

die Function aber wird

$$u = \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi) + i\sin(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi))}{[a - b + \varrho(\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2\pi))]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}{[a - b + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -u_0;$$

sie wechselt also das Zeichen. Geht dann die Variable von α nach o zurück, so behält die Function das geänderte Zeichen bei und kommt in dem Puncte o mit dem Werthe $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ an.

Ebenso verhält sich die Function bei der zweiten Elementarcontur um den Punct b. Setzt man, um dies zu untersuchen,

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und bezeichnet mit φ_0 und u_0 die Werthe, welche φ und u in dem Endpuncte β des geradlinigen Theiles der Elementarcontur auf dieser geraden Linie erhalten, sowie den Radius des kleinen Kreises mit ϱ, so ist

$$u_0 = \frac{(b - a + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0))^{\frac{1}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)}.$$

Nachdem aber der kleine Kreis beschrieben worden ist, der Winkel φ also um 2π zugenommen hat, erlangt die Function in β den Werth

$$u = -\frac{(b - a + \varrho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0))^{\frac{1}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{2}\varphi_0)} = -u_0;$$

Die Function wechselt also auch bei dieser Elementarcontur das Zeichen.

Wird die nämliche Elementarcontur zweimal hintereinander von der Variablen durchlaufen, so wechselt die Function zweimal das Zeichen, erhält also den ursprünglichen Werth wieder. Dasselbe tritt aber auch ein, wenn beide Elementarconturen, eine nach der anderen, durchlaufen werden; auch dann kommt die Function mit dem ursprünglichen Werthe nach o zurück.

Betrachten wir nun alle möglichen Wege, welche von dem Puncte o nach einem beliebigen Puncte z führen, so können alle diejenigen, welche keinen der ausgezeichneten Puncte umwinden, auf die gerade Linie oz reducirt werden; auf diesen erhält also die Function in z den nämlichen Werth, wie auf der geraden Linie, welcher Werth, wie oben, mit U bezeichnet werden möge. Alle Wege ferner, welche nur einen der beiden ausgezeichneten Puncte umwinden, können in die betreffende Elementarcontur mit darauf folgender gerader Linie oz übergeführt werden, ohne dass ein ausgezeichneter Punct überschritten wird. Auf allen diesen Wegen erhält daher die Function in z den Werth $-U$. Endlich können alle Wege, welche beide ausgezeichnete Puncte zugleich umwinden, durch den Weg ersetzt werden, welcher entsteht, wenn man der geraden Linie oz beide Elementarconturen, eine nach der anderen, vorangehen lässt. Da die Function hie-

bei zweimal das Zeichen wechselt, so erlangt sie auf allen diesen Wegen in z den Werth $+ U$.

Es giebt bei der vorliegenden Function also ebenfalls nur zwei Klassen von Wegen, auf denen dieselbe in dem nämlichen Puncte verschiedene Werthe erhält. Die eine Klasse wird durch die gerade Linie repräsentirt; die andere aber erhält man, wenn man der geraden Linie eine der beiden Elementarconturen vorangehen lässt.

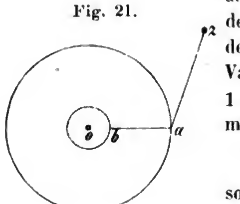
Die vorigen Beispiele erläutern, wie eine Quadratwurzel jedesmal ihr Zeichen wechselt, wenn die Variable um einen Punct, in welchem die Wurzelgrösse entweder Null oder unendlich wird, eine geschlossene Linie, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Elementarcontur beschreibt. Die letztere ist besonders auch darum vorzuziehen, weil der Radius des kleinen Kreises immer so klein genommen werden kann, dass nur ein einziger der ausgezeichneten Puncte umschlossen wird. — Betrachten wir nun noch einige transscendente Functionen.

Drittes Beispiel. Die Function

$$u = \log z$$

wird für $z = 0$ unendlich, daher ist der Nullpunct für sie ein ausgezeichneter Punct. Man gehe von dem Puncte $z = 1$ (a in Fig. 21) mit dem Werthe $u = 0$ aus und lasse die Variable z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunct durchlaufen. Setzt man

Fig. 21.



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

so ist

$$u = \log r + i\varphi,$$

wo $\log r$ den reellen Logarithmus des immer positiven Radius Vector bedeutet. Wenn nun die Variable die Peripherie des Kreises in positiver Richtung durchläuft und wieder nach a zurückkommt, so ist constant $\log r = \log 1 = 0$, aber φ ist von 0 bis 2π gewachsen; daher erhält die Function den Werth

$$2\pi i.$$

Durchläuft aber die Variable den Kreis in negativer Richtung, so

hat φ von o bis -2π abgenommen, und dann erhält die Function in a den Werth

$$-2\pi i.$$

Dieselben Werthe erhält die Function auch, wenn die Elementarcontur um den Nullpunct in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird. Lässt man nun die Variable den Kreis (oder die Elementarcontur) zweimal nach einander in positiver oder negativer Richtung durchlaufen, so erhält φ den Werth $\pm 4\pi$, und daher die Function den Werth $\pm 4\pi i$. Nach n-maliger Umkreisung des Nullpuncts in positiver Richtung und m-maliger Umkreisung in negativer Richtung erhält ebenso die Function im Puncte a den Werth

$$2\,(n-m)\,\pi i.$$

Bezeichnet man also jetzt mit n eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null, so kann die Function im Puncte a unendlich viele Werthe annehmen, die in der Formel

$$2n\pi i$$

enthalten sind. Daraus folgt dann sogleich, dass die Function auch in einem beliebigen Puncte z unendlich viele Werthe erhält, welche durch

$$(\log z) + 2n\pi i$$

bezeichnet werden können, wenn $(\log z)$ denjenigen Werth bedeutet, den die Function, von dem Puncte $z = 1$ mit dem Werthe $u = o$ ausgehend, im Puncte z auf der geraden Linie az erhält. Alle Wege, welche von a nach z führen, können hier entweder auf die gerade Linie az reducirt werden, oder man kann sie dadurch ersetzen, dass man die Elementarcontur, beliebig oft und in beliebigen Richtungen durchlaufen, der geraden Linie vorangehen lässt. Man sieht, auch hier ist die Uebereinstimmung mit der bekannten Vieldeutigkeit des Logarithmus vollständig vorhanden.

Viertes Beispiel.

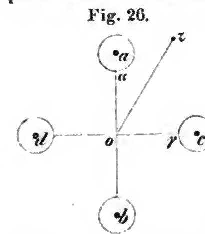
$$u = \text{arc tg}\, z.$$

Die Untersuchung dieser Function lässt sich auf das vorige Beispiel zurückführen, wenn man den Arcus Tangens in einen Logarithmus verwandelt. Man hat bekanntlich

$$u = \text{arc tg } z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}$$
$$= \frac{1}{2i} \log (i - z) - \frac{1}{2i} \log (i + z),$$

und diese Form zeigt, dass die Function arc tg z zwei ausgezeichnete Puncte hat, nämlich $z = +i$ und $z = -i$. Diese Puncte liegen auf der Ordinatenaxe zu beiden Seiten des Nullpuncts in der Entfernung 1 von dem letzteren (a und b Fig. 26).

Fig. 26.



Dabei bemerke man aber, dass die Function $\log (i - z)$ nur den einen Punct $z = +i$, und die Function $\log (i + z)$ nur den anderen Punct $z = -i$ zum ausgezeichneten Punct hat. Wir lassen nun die Function arc tg z von dem Puncte $z = o$ mit dem Werthe $u = o$ ausgehen und bezeichnen den gemeinschaftlichen Werth, mit welchem die Functionen $\log (i - z)$ und $\log (i + z)$ den Nullpunct verlassen, durch u_1. Durchläuft dann die Variable zuerst die Elementarcontur um den Punct $+i$, (a), in positiver Richtung, so erhält, wenn z zum Nullpuncte zurückgekehrt ist, die Function $\log (i - z)$ den Werth $u_1 + 2\pi i$ (wie entweder aus dem vorigen Beispiele oder auch durch directe Betrachtung mittelst der Substitution $i - z = re^{i\varphi}$ leicht erhellt); die Function $\log (i + z)$ aber bleibt ungeändert gleich u_1, weil der umwundene Punct $+i$ für sie kein ausgezeichneter Punct ist; demnach bekommt die Function arc tg z den Werth

$$u = \frac{1}{2i} (u_1 + 2\pi i) - \frac{1}{2i} u_1 = \pi.$$

Wird ebenso die andere Elementarcontur um den Punct $-i$, (b) in positiver Richtung von der Variablen durchlaufen, so erhält die Function $\log (i - z)$ wieder den ursprünglichen Werth u_1, weil diese Function nur den Punct $+i$ zum ausgezeichneten Puncte hat, die andere Function $\log (i + z)$ dagegen erhält den Werth $u_1 + 2\pi i$; mithin wird die Function arc tg z oder

$$u = \frac{1}{2i} u_1 - \frac{1}{2i} (u_1 + 2\pi i) = -\pi.$$

Eine mehrfach wiederholte Umkreisung einer Elementarcontur vervielfacht den Werth $\pm \pi$, eine Umkreisung in entgegen-

gesetzter Richtung giebt ihm das entgegengesetzte Zeichen; also enthält überhaupt die Formel

$$n\pi,$$

in welcher n eine positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, alle Werthe, welche die Function arc tg z im Nullpuncte erhält, wenn die Variable die beiden Elementarconturen, jede beliebig oft und in beliebigen Richtungen, durchläuft.

Bezeichnet man nun mit (arc tg z) den Werth, den die Function in einem beliebigen Puncte z annimmt, wenn die Variable in gerader Linie von o nach z geht, so werden alle Werthe des Arcus Tangens im Puncte z durch den bekannten vollständigen Werth dieser vieldeutigen Function

$$(\text{arc tg } z) + n\pi$$

ausgedrückt, denn alle von o nach z führenden Wege reduciren sich entweder auf die gerade Linie oz oder lassen sich dadurch ersetzen, dass vor der geraden Linie eine der beiden Elementarconturen oder beide, ein oder mehrere Male, in positiver oder negativer Richtung, durchlaufen werden.

Die behandelten Beispiele zeigen, dass eine vieldeutige Function alsdann verschiedene Werthe für denselben Werth der Variablen annehmen kann, wenn die letztere verschiedene Wege durchläuft, die gewisse ausgezeichnete Puncte einschliessen. Wenn nun diese Puncte unserer Voraussetzung gemäss discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche, Puncte sind, so kann man immer gewisse Theile der Ebene abgrenzen, innerhalb welcher ein Umwinden eines solchen Punctes nicht möglich ist; innerhalb eines solchen Theiles bleibt also auch eine im Allgemeinen vieldeutige Function einwerthig, da die Variable solche zwei Wege, auf denen die Function in dem nämlichen Puncte zwei verschiedene Werthe erhalten würde, nicht beschreiben kann. Ist ein solcher Theil der Ebene abgegrenzt, was immer leicht geschehen kann, so nennt Cauchy*) die Function monodrom in diesem Theile der Ebene. So ist z. B. die Function Arcus Tangens monodrom innerhalb eines Kreises, der mit dem Radius 1 um den Nullpunct beschrieben ist, oder zwischen zweien,

*) Cauchy. Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tom. IV. p. 325.

durch die Puncte $+ i$ und $- i$ der Abscissenaxe parallel gezogenen, geraden Linien. Eine eindeutige Function ist daher in der ganzen Ausdehnung der Ebene monodrom. Beschreibt die Variable z eine geschlossene Linie, und erhält eine Function $f(z)$, wenn die Variable, von einem beliebigen Puncte dieser Linie ausgehend, wieder zu demselben Puncte zurückkehrt, den nämlichen Werth wie beim Ausgange, so wollen wir sagen, die Function $f(z)$ sei monodrom auf dieser geschlossenen Linie.

Wenn eine Function der complexen Variablen z in Riemann's Sinne, oder nach Cauchy's Benennung eine monogene Function, in einem gewissen Theile der Ebene (welcher auch die ganze unendliche Ebene umfassen kann) monodrom und zugleich überall in diesem Theile der Ebene endlich und stetig ist, so soll sie nach Cauchy*) eine in diesem Theile der Ebene synektische Function genannt werden. Die Function $\sin z$ ist z. B. synektisch in der ganzen Ausdehnung der Ebene, die Function $\operatorname{tg} z$ ist dagegen synektisch in einem mit dem Radius $\frac{\pi}{2}$ um den Nullpunct beschriebenen Kreise, denn für $z = \frac{\pi}{2}$ wird sie unendlich.

§ 83.**)

Das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Variablen lässt sich genau in derselben Weise definiren, wie das bestimmte Integral einer reellen Function.

Es seien z_0 und z irgend zwei complexe Werthe der Variablen z. Man denke sich die Puncte, welche diese beiden

---

*) Cauchy. Sur les rapports différentiels des quantités géométriques et sur les intégrales synectiques des équations différentielles. (Comptes rendus. 1855. Tome 40. p. 447.)

**) Vgl. hiezu:

Cauchy. Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée (Comptes rendus. 1846. Tome 23. p. 251.)

Cauchy. Considérations nouvelles sur les intégrales définies, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée et sur celles, qui sont prises entre des limites imaginaires. (Comptes rendus. 1846. Tome 23. p. 689.)

Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques (Liouville. Journ. de math. Tome 15. p. 365).

Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden (Fig. 24) und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Puncte an, welche den Werthen z_1, $z_2, \ldots . z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine gegebene Function von z, und bildet man die Summe der Producte

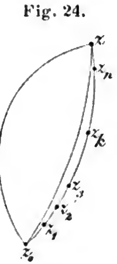


Fig. 24.

$$f(z_0)(z_1-z_0)+f(z_1)(z_2-z_1)+\ldots\ldots+f(z_n)(z-z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen z_0 und z längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe bis ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also bis ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen z_0 und z, also:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_0)(z_1-z_0)+f(z_1)(z_2-z_1)+\ldots\ldots+f(z_n)(z-z_n)].$$

Dabei muss, damit die Summe der Producte sich wirklich einem bestimmten Grenzwerthe nähere, die Function $f(z)$ in allen Puncten der ununterbrochenen Linie einen endlichen Werth besitzen und in keinem eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden.

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlichen Definition eines bestimmten Integrals bei reellen Variabeln in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen zwei Werthen z_0 und z durchläuft, kein vorgeschriebener ist, sondern jede beliebige ununterbrochene Linie sein kann. Ein zweiter Unterschied besteht darin, dass man bei reellen Variabeln gewöhnlich die Differenzen je zweier auf einander folgender Werthe gleich annimmt. Dies ist bei complexen Werthen der Variablen nicht immer erlaubt, denn da die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. die geraden Linien $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, etc. ihrer Länge und Richtung nach darstellen, so würde die Annahme der Gleichheit dieser Differenzen zugleich voraussetzen, dass der von der Variablen durchlaufene Weg die von z_0 nach z führende gerade Linie sei. Es ist aber, wie wir schon im vorigen § gesehen haben, von der höchsten Wichtigkeit, den Weg, welchen die Variable durchläuft, nicht näher zu bestimmen, sondern derselben alle Wege offen zu erhalten. Es

ist auch aus der Lehre der reellen bestimmten Integrale bekannt, dass die Annahme der Gleichheit der Differenzen durchaus nicht wesentlich ist. Man kann daher folgende von reellen Integralen geltenden Sätze unmittelbar auf complexe Integrale übertragen:

1) Bedeutet z_k irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\, dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\, dz.$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\, dz = -\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Ehe wir nun zu einer näheren Untersuchung des Einflusses übergehen, den der von der Variablen durchlaufene Weg auf den Werth des Integrals hat, schicken wir die folgende Betrachtung voran:

Es seien P und Q zwei reelle Functionen von zwei Variabeln x und y von der Beschaffenheit, dass sie für alle Werthe dieser Variabeln, welche, als rechtwinklige Coordinaten angesehen, den Puncten einer von einer geschlossenen Linie begrenzten ebenen Fläche angehören, endlich, stetig und eindeutig sind. Dies vorausgesetzt, kann man das Doppelintegral

$$J = \int\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy,$$

genommen in Bezug auf den ganzen, von der geschlossenen Linie begrenzten Theil der Ebene, in ein einfaches Integral verwandeln, welches sich nur auf solche Werthe von x und y erstreckt, deren zugehörige Puncte auf der Peripherie der geschlossenen Linie liegen.

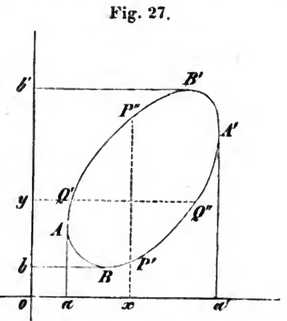
Schreibt man das Integral J in der Form

$$J = \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy - \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = J_1 - J_2,$$

so kann man im ersten Theile die Integration nach y, im zweiten Theile die nach x ausführen. Zieht man nämlich die zu

einer beliebigen Abscisse x zugehörige Ordinate, welche die geschlossene Linie zweimal durchschneidet (Fig. 27), und bezeichnet die den Durchschnittspuncten zugehörigen Werthe der Function P mit P' und P'', so hat man, da die Function P innerhalb der Linie endlich, stetig und eindeutig vorausgesetzt wird,

Fig. 27.



$$J_1 = \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$
$$= \int P''\, dx - \int P'\, dx.$$

In diesen Integralen geht x von der ersten, äussersten Abscisse a bis zur letzten a'. In dem ersten Integrale hat man daher für P'' alle Werthe der Function P einzusetzen, welche dieselbe nach und nach in den Puncten der Linie $AP''A'$ annimmt. Ebenso hat man in dem zweiten Integrale für P' alle diejenigen Werthe der Function P einzusetzen, welche diese nach und nach in den Puncten der Linie $AP'A'$ annimmt. Lässt man aber in dem zweiten Integrale die Abscisse x in umgekehrter Richtung von a' nach a gehen, so kehrt das zweite Integral sein Zeichen um, zugleich wird der Theil $AP'A'$ der geschlossenen Linie ebenfalls in umgekehrter Richtung, nämlich von A' über P' nach A, durchlaufen und bildet mit dem ersten Theile $AP''A'$ zusammen die ganze geschlossene Linie. Demnach erhält man

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int P\, dx,$$

dieses Integral längs der ganzen geschlossenen Linie genommen; d. h. es sind für P alle diejenigen Werthe dieser Function zu setzen, die dieselbe in den Puncten der geschlossenen Linie $AP''A'P'A$ hat.

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$J_2 = \int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

behandeln. Bezeichnen Q' und Q'' die Werthe, welche die Func-

tion Q in den beiden Durchschnittspuncten einer zu einem beliebigen Werthe von y zugehörigen Abscisse erhält, so ist

$$J_2 = \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int Q''\, dy - \int Q'\, dy.$$

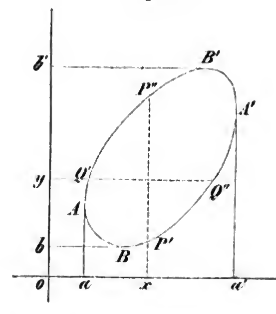


Fig. 27.

Hier geht y von b bis b', das erste Integral ist also längs der Linie $BQ''B'$, das zweite längs der Linie $BQ'B'$ zu nehmen. Kehrt man aber in dem letzteren wieder das Zeichen um, so vereinigen sich beide Integrale zu einem einzigen, $\int Q\, dy$, welches auf die ganze geschlossene Linie $BQ''B'Q'B$ auszudehnen ist. Allein, wie man sieht, ist jetzt die Integration in $\int Q\, dy$ in umgekehrter Richtung zu nehmen wie früher in $\int Pdx$. Will man daher bei beiden Integralen die Richtung die nämliche sein lassen, so muss man setzen

$$-\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int Q\, dy,$$

und erhält alsdann schliesslich

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = \int (P\, dx + Q\, dy).$$

Man kann also ein in Bezug auf eine von einer geschlossenen Linie begrenzte ebene Fläche genommenes Integral in ein längs der geschlossenen Linie genommenes, und umgekehrt, verwandeln.

Es sei nun wie früher

$$u = f(z) = X + iY$$

eine Function der complexen Variablen

$$z = x + iy.$$

Wir betrachten das Integral $\int f(z)\, dz$, bei welchem die Variable z

eine geschlossene Linie beschreibe, und nehmen an, dass die Function $f(z)$ innerhalb dieser geschlossenen Linie überall synektisch sei, d. h. dass sie in allen Puncten im Inneren und auf der Peripherie der geschlossenen Linie endlich und stetig bleibe, und dass sie denselben Werth wieder erhalte, wenn die Variable die geschlossene Linie beschrieben hat. Dann ist

$$\int f(z)\, dz = \int (X + iY)\,(dx + i\, dy)$$

$$= \int (Xdx - Ydy) + i \int (Ydx + Xdy).$$

Nach dem eben bewiesenen Satze lassen sich diese beiden Integrale in Doppelintegrale verwandeln, sodass man erhält

$$\int f(z)\, dz = \int\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\, dy + i \int\int \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) dx\, dy.$$

Wenn nun aber $X + iY$ eine Function von z ist, so müssen nach § 80 (1) die Bedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = o$$

erfüllt sein; folglich sind beide Doppelintegrale Null, und daher auch

$$\int f(z)\, dz = o.$$

Wir haben hiemit folgenden Satz gewonnen:

Satz I. Das Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen, längs einer geschlossenen Linie genommen, hat stets den Werth Null, wenn die Function innerhalb dieser Linie überall synektisch ist.

Hieraus geht sofort das Verhalten der Werthe eines Integrals hervor, wenn man die Variable zwei verschiedene, aber zwischen denselben zwei Puncten enthaltene, Wege durchlaufen lässt. Des präciseren Ausdrucks halber möge dabei folgende Bezeichnung an-

gewendet werden: Wenn die Variable z den Weg acb (Fig. 28) durchläuft, so soll das Integral

$$\int_a^b f(z)\, dz \text{ mit } J(acb)$$

Fig. 28.

bezeichnet werden. Es seien nun acb und adb zwei von a nach b führende Wege, so beschaffen, dass innerhalb der dadurch begrenzten Fläche die Function $f(z)$ überall synektisch sei; dann ist nach dem vorigen Satze

$$J(acbda) = o.$$

Weil aber

$$J(acbda) = J(acb) + J(bda)$$

und

$$J(bda) = -J(adb)$$

ist, so ist

$$J(acb) = J(adb);$$

d. h. **Satz II.** Wenn in einem bestimmten Integral die Variable beim Uebergang von der unteren zur oberen Grenze zwei verschiedene Wege durchläuft, so erhält das Integral auf beiden Wegen denselben Werth, wenn die Function innerhalb der von den beiden Wegen eingeschlossenen Fläche überall synektisch ist.

Man kann die Bedingung, unter welcher dieser Satz gilt, auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, der von den beiden Wegen eingeschlossene Theil der Ebene darf keinen ausgezeichneten Punct der Function enthalten; denn wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Function in jenem Theile der Ebene synektisch. Zu bemerken ist ferner, dass der gemeinschaftliche Anfangs- und Endpunct der beiden Wege auch zusammenfallen können, sodass beide Wege geschlossene Linien bilden, die jedoch den Ausgangspunct gemeinsam haben; der Satz bleibt dann immer noch richtig, wenn nur in dem zwischen den beiden Wegen liegenden Flächenstücke sich keine ausgezeichneten Puncte befinden, wie auch übrigens die Function beschaffen sein mag.

Nehmen wir wieder an, die Variable z durchlaufe eine geschlossene Linie $adbca$ (Fig. 28), und die Function $f(z)$ sei

monodrom auf derselben, aber es befinden sich in deren Inneren ein oder mehrere Puncte t, in welchen die Function unendlich wird, so kann man nicht mehr behaupten, dass das längs der geschlossenen Linie genommene Integral gleich Null ist; wir werden vielmehr weiter unten sehen, wie wir den Werth desselben ermitteln können. Lässt man nun aber die Variable z eine andere geschlossene Linie $efge$, welche den oder die Puncte t ebenfalls umgiebt, in der nämlichen Richtung durchlaufen, und ist die Function $f(z)$ innerhalb des von den beiden geschlossenen Linien begrenzten Raumes überall endlich und stetig und ausserdem auch auf der zweiten Linie $efge$ monodrom, so hat das Integral längs der Linie $adbca$ denselben Werth, wie längs der Linie $efge$. Denn verbindet man einen Punct e der einen Linie mit einem beliebigen Puncte a der anderen so, dass die Verbindungslinie den von der Linie $efge$ umschlossenen Raum nicht durchschneidet, so ist

$$J(aefgea) = J(adbca),$$

weil man auf diese beiden Integrale den vorigen Satz anwenden kann. Nun ist aber

$$J(aefgea) = J(ae) + J(efge) + J(ea)$$
$$= J(efge),$$

denn da die Function $f(z)$ auf der Linie $efge$ monodrom ist, so hat sie beim Durchlaufen der Linie ea in dieser Richtung dieselben Anfangs- und Endwerthe, wie vorher in der Richtung ae, folglich sind die Integrale $J(ae)$ und $J(ea)$ gleich und entgegengesetzt. Demnach ist, was zu beweisen war,

$$J(efge) = J(adbca).$$

Man hat also auch folgenden Satz:

Satz III. Wenn die Variable z um einen oder mehrere Puncte herum, in welchen die Function $f(z)$ unendlich wird, zwei verschiedene geschlossene Linien durchläuft, und die Function $f(z)$ sowohl längs diesen Linien monodrom ist, als auch in dem zwischen denselben enthaltenen Raume endlich und stetig bleibt, so hat das Integral $\int f(z)\,dz$, längs beiden geschlossenen Linien genommen, denselben Werth.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass dieser Satz nicht mehr gilt, wenn die Function $f(z)$ auf den geschlossenen Linien nicht monodrom ist. Wäre sie z. B. eine Quadratwurzel, welche für $z = t$ unendlich wird, wie $\frac{1}{\sqrt{z-t}}$, so würde sie, wenn die Variable zum zweiten Male nach e kommt, das Zeichen wechseln, und dann würde $J(ae) + J(ea)$ nicht gleich Null, sondern gleich $2\,J(ac)$ sein.*)

Wir gehen nun zur Bestimmung des Werthes eines Integrals

$$\int f(z)\, dz$$

über, wenn dasselbe längs einer geschlossenen Linie genommen wird, innerhalb welcher die Function $f(z)$ unendlich werden kann, vorausgesetzt, dass sie auf der geschlossenen Linie monodrom ist. Nehmen wir zuerst den Fall, dass die Function $f(z)$ nur in einem einzigen Puncte t innerhalb der geschlossenen Linie unendlich werde, so sei $adbca$ (Fig. 28) diese Linie; dann hat das Integral nach dem vorigen Satze längs jeder geschlossenen Linie, die innerhalb $adbca$ liegt und den Punct t umschliesst, denselben Werth, wie längs $adbca$, also auch längs eines um t mit einem kleinen Radius ϱ beschriebenen Kreises. Setzt man

Fig. 28.

$$z - t = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\, e^{i\varphi},$$

so bleibt, während z die Peripherie dieses Kreises durchläuft, ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bezeichnet. Schreibt man ferner

$$f(z)\, dz = \frac{(z-t)\, f(z)\, dz}{z-t},$$

so erhält man, da

$$\frac{dz}{z-t} = \frac{\varrho\, e^{i\varphi}\, i\, d\varphi}{\varrho\, e^{i\varphi}} = i\, d\varphi$$

*) Man bemerke, dass, wenn die geschlossenen Linien jede zweimal durchlaufen werden, die Quadratwurzel also zweimal das Zeichen wechselt, der Satz für diese Function wieder gültig wird. Aus diesem Grunde könnte man, übereinstimmend mit Riemann's Anschauungsweise, eine Linie erst dann geschlossen nennen, wenn die Function, zum Ausgangspuncte zurückkehrend, auch wieder denselben Werth erhält.

wird,

$$\int f(z)\, dz = i \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} (z - t)\, f(z)\, d\varphi.$$

Der Werth des Integrals ist nach dem vorigen Satze von der Grösse des Radius ganz unabhängig, wofern der Kreis nur ganz innerhalb der Linie *adbca* liegt, oder wenigstens keinen zweiten ausgezeichneten Punct umschliesst. Man kann daher den Radius ϱ auch bis ins Unendliche abnehmen lassen; dann nähert sich z dem Werthe t, $z - t$ der Null, und $f(z)$ dem Werthe $f(t)$, welcher der Annahme nach unendlich gross ist. Das Product $(z - t)\, f(z)$ nimmt also die Form $o . \infty$ an und kann daher möglicher Weise einen endlichen Grenzwerth haben. Wir wollen nun diesen Fall annehmen, also voraussetzen, dass die Function $f(z)$ zwar für $z = t$ unendlich werde, zugleich aber so beschaffen sei, dass das Product $(z - t)\, f(z)$ sich für $z = t$ einem endlichen Grenzwerthe nähere, welcher auch von φ unabhängig sei, d. h. welcher für jede Richtung, auf welcher man sich dem Puncte t nähert, derselbe bleibe. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit p, setzt also

$$\lim (z - t)\, f(z) = p \qquad (\text{für } z = t),$$

so wird nun

$$\int f(z)\, dz = ip \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} d\varphi = 2\pi i p.$$

Hiedurch ist der Werth des Integrals längs der geschlossenen Linie bekannt, sobald der Grenzwerth p gefunden werden kann. Für den Fall, dass $f(t)$ nicht unendlich gross ist, ist p allemal Null, und wir kommen wieder auf den früheren Satz zurück, dass auch das Integral Null ist.*)

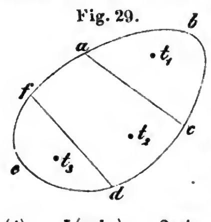
Dieser Satz kann nun sogleich auf den Fall ausgedehnt werden, dass die geschlossene Linie in ihrem Inneren mehrere Puncte

---

*) Diesen wichtigen Satz hat Cauchy zuerst, wenn auch in anderer Form, in der Abhandlung „Mémoire sur les intégrales définies." (Mémoires présentés par divers savans à l'académie des sciences. Tome I. 1827) ausgesprochen, von welcher Abhandlung Poisson in dem „Bulletin des sciences par la société philomatique de Paris." (Année 1811. p. 185) einen Bericht gegeben hat.

enthält, in denen die Function unendlich wird, wenn diese Puncte nur discrete, in endlichen Entfernungen von einander befindliche, sind.*) Nehmen wir beispielsweise an, es seien drei solche Puncte vorhanden, t_1, t_2, t_3. Die Function $f(z)$ sei in diesen drei Puncten unendlich gross, im übrigen aber innerhalb der geschlossenen Linie synektisch, ferner mögen die Producte $(z - t_1) f(z)$, $(z - t_2) f(z)$, $(z - t_3) f(z)$ für $z = t_1$, $z = t_2$, $z = t_3$ bestimmte endliche Grenzwerthe annehmen, die resp. durch p_1, p_2, p_3 bezeichnet werden mögen. Dies vorausgesetzt, theile man die von der geschlossenen Linie begrenzte Fläche durch zwei Querlinien ac und fd (Fig. 29) so in drei Theile, dass jeder Theil nur einen der Puncte t_1, t_2, t_3 enthält. Alsdann kann man den Werth des Integrals $\int f(z)\,dz$ längs der Begrenzung eines jeden dieser Theile nach dem vorigen Satz bestimmen. Mit Anwendung der S. 348 angegebenen Bezeichnung erhält man nämlich

Fig. 29.



$$(4) \qquad J(acba) = 2\pi i p_1, \quad J(afdca) = 2\pi i p_2, \quad J(fedf) = 2\pi i p_3,$$

wobei die geschlossenen Linien alle in der Richtung der wachsenden φ durchlaufen werden müssen. Nun ist aber

$$J(acba) = J(ac) + J(cba)$$
$$J(afdca) = J(af) + J(fd) + J(dc) + J(ca)$$
$$J(fedf) = J(fed) + J(df),$$

folglich erhält man, da

$$J(ac) + J(ca) = o, \quad J(fd) + J(df) = o$$

ist,

$$J(acba) + J(afdca) + J(fedf) = J(cba) + J(af) + J(fed) + J(dc)$$
$$= J(cbafedc),$$

d. h. die Summe der drei Werthe (4) ist gleich dem Integral längs der ganzen geschlossenen Linie genommen. Also ist dieses Integral

$$J(cbafedc) = 2\pi i (p_1 + p_2 + p_3).$$

*) Vgl. ausser den oben angegebenen Abhandlungen auch noch die folgende:

Cauchy. Mémoire sur les variations intégrales des fonctions. Comptes rendus. 1855, Tome 40. p. 651, 713 und 804.

§ 84.

Die im vorigen § angestellten Betrachtungen deuten darauf hin, dass der Werth eines complexen Integrals, sobald die unter dem Integralzeichen stehende Function nicht überall synektisch ist, wesentlich von dem Integrationswege abhängig sein wird. Wenn dies aber der Fall ist, so kann ein bestimmtes Integral, dessen obere Grenze veränderlich ist, für einen und denselben Werth dieser oberen Grenze, je nachdem die Variable, von der constanten unteren Grenze ausgehend, diesen oder jenen Weg durchläuft, andere und andere Werthe erhalten, und daher eine mehrdeutige Function der oberen Grenze darstellen. Puiseux hat in der schon mehrere Male citirten Abhandlung gezeigt*), dass alle Integrationswege auf gerade Linien und Elementarconturen zurückgeführt werden können, und es dadurch möglich gemacht, dass man alle Werthe, welche ein bestimmtes Integral annimmt, wenn alle möglichen Integrationswege berücksichtigt werden, wirklich angeben kann. Dieses soll nun an einigen Beispielen näher erläutert werden.

Erstes Beispiel. Wir beginnen mit dem Integral

$$\int \frac{dz}{z}.$$

Die Function $\frac{1}{z}$ ist zwar in der ganzen Ebene monodrom, aber sie wird unendlich für $z = o$. Der Nullpunct ist daher ein ausgezeichneter Punct, und wir können nach dem vorigen § den Werth des Integrals bestimmen, wenn es längs einer, den Nullpunct umgebenden, geschlossenen Linie, also auch längs einer, von einem beliebigen Puncte ausgehenden, Elementarcontur um den Nullpunct genommen wird. Wir haben hier

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad t = o,$$

also

$$(z - t)\, f(z) = \frac{z}{z} = 1;$$

demnach ist auch

$$p = 1,$$

*) Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques. III. Partie. (Liouville. Journ. de math. T. 15. p. 429.)

und der Werth des Integrals gleich

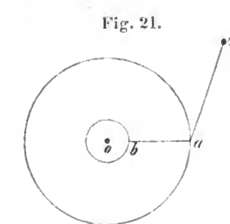
$$\pm\, 2\pi i,$$

je nachdem die Elementarcontur in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird. Wird die Elementarcontur n-Mal hinter einander in der gleichen Richtung durchlaufen, so ist der Werth des Integrals

$$\pm\, 2n\pi i.$$

Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 1 und z, wo z einen beliebigen Werth der Variablen bedeuten, und der Werth 1 durch den Punct a (Fig. 21) dargestellt werden möge, und bezeichnet man das längs der geraden Linie az genommene Integral, welches das geradlinige Integral genannt werden soll, mit $(\log z)$, so erhält das Integral nach dem zweiten Satze des vorigen § auf jedem Wege, der den ausgezeichneten Punct nicht umschliesst, ebenfalls den Werth $(\log z)$; jeder Weg aber, der den ausgezeichneten Punct ein oder mehrere Male umwindet, ertheilt dem Integrale denselben Werth, wie der Weg, welcher entsteht, wenn man der geraden Linie die Elementarcontur von a aus um den Nullpunct in ein- oder mehrmaliger Umkreisung vorhergehen lässt. Nimmt man daher auf alle Wege Rücksicht, welche die Variable von dem Puncte a bis z durchlaufen kann, so erhält man für alle Werthe, die das Integral annehmen kann, die Formel

Fig. 21.



$$\int_1^z \frac{dz}{z} = (\log z) + 2n\pi i,$$

worin n jede positive oder negative ganze Zahl und auch Null sein kann. Hieraus geht hervor, dass das vorliegende Integral, wenn man nur keinen der möglichen Integrationswege ausschliesst, in der That die Function $\log z$ in ihrer ganzen Vieldeutigkeit darstellt.

Zweites Beispiel.

$$\int \frac{dz}{1+z^2}.$$

In diesem Integrale ist die Function

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls monodrom in der ganzen Ebene, sie wird aber unendlich für $z = +i$ und für $z = -i$, daher sind die Puncte $+i$ und $-i$ ausgezeichnete Puncte. Sie sind in Fig. 26 mit a und b bezeichnet. Untersucht man die Integrale längs den Elementarconturen um diese Puncte, so ist, wenn man $t_1 = i$ und $t_2 = -i$ setzt,

Fig. 26.

$$(z - t_1) f(z) = \frac{z - i}{1 + z^2} = \frac{1}{z + i},$$

folglich der Grenzwerth für $z = i$

$$p_1 = \lim (z - t_1) f(z) = \frac{1}{2i};$$

ebenso ist

$$(z - t_2) f(z) = \frac{z + i}{1 + z^2} = \frac{1}{z - i},$$

und der Grenzwerth für $z = -i$

$$p_2 = \lim (z - t_2) f(z) = -\frac{1}{2i};$$

die Werthe, welche das Integral längs den beiden Elementarconturen um die Puncte $+i$ und $-i$ erhält, sind daher resp.

$$+\pi \quad \text{und} \quad -\pi.$$

Nimmt man das Integral längs einer geschlossenen Linie, welche beide ausgezeichnete Puncte so umgiebt, dass beide in positiver Richtung umkreist werden, so erhält dasselbe nach dem letzten Satze des vorigen § den Werth

$$\pi - \pi = 0.$$

Bezeichnet man nun, ähnlich wie vorhin, mit (arc tg z) das geradlinige Integral zwischen den Grenzen o und z, und lässt der geraden Linie die beiden Elementarconturen, jede beliebig oft, vorangehen, so sind alle übrigen Integrationswege einem der ersteren aequivalent; daher ist der in Rücksicht auf alle möglichen Integrationswege vollständige Werth des Integrals

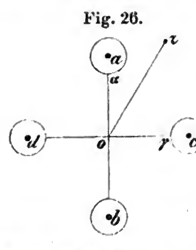
$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = (\text{arc tg } z) + n\pi,$$

wo n eine positive oder negative ganze Zahl (Null eingeschlossen) bedeutet, stellt also die vieldeutige Function Arcus Tangens vollständig dar.

Wir wollen bei diesem Beispiele den Werth des Integrals, wenn es längs einer der beiden Elementarconturen genommen wird, des Folgenden wegen, auch noch direct ermitteln.

Lässt man die Variable vom Nullpuncte auf der Ordinatenaxe bis zu einem nahe an $+i$ (a in der Fig.) liegenden Puncte α gehen, einen ganzen Kreis mit dem Radius ϱ um a beschreiben und dann nach dem Nullpuncte zurückkehren, so zerlegt sich das längs dieses Weges genommene Integral in drei Theile, nämlich in die beiden geradlinigen Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ und das längs des Kreises genommene Integral. Aber da die Function monodrom ist, so hat sie, wenn z zum zweiten Male nach α kommt, dort denselben Werth, wie beim ersten Male; folglich sind die beiden Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ gleich und entgegengesetzt und heben sich auf, sodass nur das Integral längs des Kreises ermittelt zu werden braucht*). Setzt man zu diesem Zwecke

Fig. 26.



$$z - i = \varrho e^{i\varphi},$$

so ist auf diesem Integrationswege ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bedeutet. Nun ist aber

$$z + i = 2i + \varrho e^{i\varphi}, \quad dz = i\varrho e^{i\varphi} d\varphi,$$

demnach

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{id\varphi}{2i+\varrho e^{i\varphi}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{d\varphi}{2 - i\varrho^{i\varphi}}.$$

Lässt man alsdann den Radius ϱ bis ins Unendliche abnehmen, so erhält man als Grenzwerth

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{d\varphi}{2} = \pi$$

---

*) Dies folgt auch aus dem dritten Satze des vorigen §.

wie oben. Auf dieselbe Weise ergiebt sich durch die Substitution

$$z + i = \varrho e^{i\varphi},$$

bei der anderen Elementarcontur der Integralwerth $-\pi$.

Drittes Beispiel.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Hier ist die Function

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

nicht in der ganzen Ebene monodrom, vielmehr wird sie nicht nur unendlich in den beiden ausgezeichneten Puncten $z = +1$ und $z = -1$ (c und d, Fig. 26), sondern sie wechselt auch das Zeichen, wenn die Variable eine geschlossene Linie um einen dieser Puncte beschreibt und auf ihren Ausgangspunct wieder zurückkommt. Zur Ermittelung der Integralwerthe für die Elementarconturen reicht daher hier der Cauchy'sche Satz nicht mehr aus, sondern wir müssen dazu in ähnlicher Weise verfahren, wie es am Ende des vorigen Beispiels angegeben worden ist. Zugleich aber müssen wir auch den Werth angeben, mit welchem die Function $\sqrt{1-z^2}$ von dem Puncte $z = o$ ausgehen soll, wir wählen dazu den Werth $+1$. Wir lassen also die Variable von o auf der Abscissenaxe bis zu einem nahe an c liegenden Puncte γ gehen, beschreiben mit ihr einen Kreis um c mit dem Radius ϱ und kehren auf der Abscissenaxe von γ nach o zurück. Zerlegt man nun aber wieder das Integral längs dieser Elementarcontur in die beiden geradlinigen Integrale $J(o\gamma)$, $J(\gamma o)$ und das Integral längs des Kreises, so heben sich die beiden ersteren hier nicht auf; denn da die Function $\sqrt{1-z^2}$ nach der Umkreisung des Punctes c mit dem entgegengesetzten Zeichen nach γ zurückkommt, die Elemente dz auf dem Wege γo ebenfalls das entgegengesetzte Zeichen haben, so erhalten die Elemente

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

auf dem Wege γo dieselben Werthe, wie auf dem Wege $o\gamma$, und daher ist

$$J(\gamma o) = J(o\gamma) \quad \text{und} \quad J(o\gamma) + J(\gamma o) = 2J(o\gamma).$$

Zur Ermittelung des kreisförmigen Integrals setze man ferner, damit ϱ constant sei,

$$1 - z = \varrho e^{i\varphi},$$

dann erhält man

$$1 + z = 2 - \varrho e^{i\varphi}, \quad dz = - i\varrho e^{i\varphi} d\varphi,$$

mithin

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - i\varrho^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi}{\sqrt{2-\varrho e^{i\varphi}}}.$$

Lässt man nun aber hierin den Radius ϱ bis ins Unendliche abnehmen, so nimmt auch der Werth dieses Integrals bis ins Unendliche ab; zugleich nähert sich der Punct γ dem Puncte c, der Integralwerth für diese Elementarcontur reducirt sich daher auf den doppelten Werth des geradlinigen Integrals zwischen den Grenzen o und 1. Folglich erhält man dafür

$$2\, J\,(oc) = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2 \text{ arc sin } 1 = \pi.$$

Ganz in derselben Weise ergiebt sich, dass der Integralwerth für die Elementarcontur um -1 sich auf den doppelten Werth des geradlinigen Integrals zwischen den Grenzen o und -1 reducirt. Man erhält dann für dieses Integral den Werth

$$2 \int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \pi.$$

Wenn die Function $\sqrt{1-z^2}$ aus dem Puncte $z = o$ mit dem Werthe -1 ausgeht, so erhalten auch die Integralwerthe längs der Elementarconturen die entgegengesetzten Werthe, also um den Punct $+1$ den Werth $-\pi$, und um den Punct -1 den Werth $+\pi$; denn während z auf der geraden Linie von o bis $+1$ oder -1 geht, kann die Wurzel ihr Zeichen nicht wechseln, sondern behält das einmal erhaltene bei.

Lässt man nun die Variable die Elementarcontur um den Punct $+1$ zweimal hinter einander durchlaufen, so erhält das Integral nach dem ersten Umlaufe den Werth $+\pi$, nun hat aber die Wurzel das Zeichen gewechselt, der zweite Umlauf giebt also dem Integral den Werth $-\pi$ und daher beide zusammen den Werth $\pi - \pi = o$. Ebenso verhält es sich, wenn die Variable

die Elementarcontur um den Punct -1 zweimal hinter einander durchläuft. Wenn dagegen zuerst die Elementarcontur um den Punct $+1$, und dann die um den Punct -1 beschrieben wird, so erhält das Integral bei dem zweiten Umlaufe wegen des erfolgten Zeichenwechsels der Wurzel den Werth $+\pi$, und daher auf beiden Umläufen den Werth $\pi + \pi = 2\pi$. Ebenso ist es, wenn zuerst die Elementarcontur um den Punct -1, und dann die um den Punct $+1$ beschrieben wird; auf diesem Wege erhält das Integral den Werth -2π.

Bezeichnet man nun wieder das geradlinige Integral zwischen den Grenzen o und z mit (arc sin z), wenn die Wurzel mit dem Werthe $+1$ von dem Puncte $z = o$ ausgeht, so kann man zuerst dieser geraden Linie eine der beiden Elementarconturen vorhergehen lassen, dann erhält das Integral wegen des nach dem Umlaufe um die Elementarcontur erfolgten Zeichenwechsels den Werth

$$\pm \pi - (\text{arc sin } z).$$

Zweitens kann man zuerst beide Elementarconturen hinter einander beliebig oft beschreiben, dann erfolgt eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln, mithin kommt die Wurzel wieder mit dem Werthe $+1$ nach dem Puncte $z = o$ zurück; geht man also hierauf in gerader Linie von o nach z, so erhält das Integral den Werth

$$2n\pi + (\text{arc sin } z);$$

endlich kann man zwischen dem Umlaufe um beide Elementarconturen und der geraden Linie noch einen Umlauf um eine der beiden Elementarconturen einschalten, dann erhält man für das Integral den Werth

$$2n\pi \pm \pi - (\text{arc sin } z).$$

Damit sind alle Wege, auf welchen das Integral verschiedene Werthe erhalten kann, erschöpft, und es ergeben sich für diese die beiden Reihen

$$\left.\begin{array}{c} 2n\pi + (\text{arc sin } z) \\ \text{und} \quad (2n+1)\,\pi - (\text{arc sin } z), \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

in welchen n jede positive oder negative ganze Zahl und Null bedeuten kann.

Die drei bis jetzt betrachteten Beispiele zeigen, dass die drei Integrale

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z, \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } z, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc sin } z,$$

vieldeutige Functionen ihrer oberen Grenzen darstellen, indem jedem Werthe der letzteren eine Reihe von Werthen des Integrals zugehört, die um Vielfache gewisser constanter Grössen von einander verschieden sind. Diese Constanten sind bei den drei Integralen der Reihe nach

$$2\pi i, \quad \pi \text{ und } 2\pi.$$

Betrachtet man nun umgekehrt die oberen Grenzen als Functionen der Integrale, so werden diese Functionen periodische Functionen, da sie für eine Reihe in arithmetischer Progression auf einander folgender Werthe des Integrals gleiche Werthe annehmen; bezeichnet man die Integrale mit u, so ist

$$e^{u+2n\pi i} = e^u, \ \text{tg}(u + n\pi) = \text{tg } u, \ \sin(u + 2n\pi) = \sin u.$$

Man nennt daher die constanten Grössen, um deren Vielfache die Integralwerthe sich unterscheiden, Perioden.

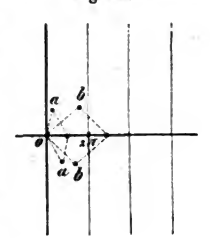
Man kann sich von der Periodicität eine geometrische Vorstellung machen, wenn man die Ebene durch parallele Gerade in Streifen zerlegt; diese Parallelen laufen bei der Function e^u der Abscissenaxe parallel und sind um 2π von einander entfernt; bei den Functionen tg u und sin u dagegen sind sie der Ordinatenaxe parallel und haben resp. die Entfernungen π und 2π von einander. In jedem dieser Streifen erhält die Function ihre sämmtlichen Werthe, und in je zwei entsprechenden Puncten zweier verschiedener Streifen nimmt die Function dieselben Werthe an. Die Functionen e^u und tg u nehmen in jedem Streifen jeden ihrer Werthe nur einmal an, d. h. sie haben in je zwei verschiedenen Puncten des nämlichen Streifens verschiedene Werthe. Die Function sin u aber nimmt wegen des zweiten der Ausdrücke (5) in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe zweimal an, denn da nun auch

$$\sin((2n + 1)\pi - u) = \sin u$$

ist, so erhält sin u den gleichen Werth für jede zwei Werthe von u, deren Summe entweder gleich π oder gleich einem unge-

raden Vielfachen von π ist. Je zwei solche Puncte a, a oder b, b desjenigen Streifens z. B., der von den durch den Nullpunct und den Punct 2π gezogenen Parallelen gebildet wird, liegen daher so, dass sie mit dem Nullpunct und einem der Puncte π oder 3π ein Parallelogramm bilden, in welchem die Gerade von o nach π oder von o nach 3π eine Diagonale ist. (S. Fig. 30.)*)

Fig. 30.



Viertes Beispiel.**) Zuletzt wollen wir nun auch das elliptische Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

betrachten. Dieses ist dem vorigen in vieler Beziehung analog. Auch hier ist die Function nicht monodrom, sondern wechselt das Zeichen beim Umlaufe um einen der vier ausgezeichneten Puncte $z = +1$, $z = +\frac{1}{k}$, $z = -1$, $z = -\frac{1}{k}$. Untersucht man die Integrale längs einer der vier Elementarconturen, indem man annimmt, dass die Wurzelgrösse mit dem Werthe $+1$ von dem Puncte $z = o$ ausgeht, zerlegt man also wie vorhin das Integral längs der Elementarcontur in zwei geradlinige und ein kreisförmiges, so werden auch hier die kreisförmigen Integrale unendlich klein. Um dies für alle vier zu gleicher Zeit einzusehen, bezeichnen wir die vier Werthe $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ mit a, b, c, d, sodass jeder der letzteren nach und nach jeden der ersteren bedeuten kann. Dann wird das Integral:

$$\frac{1}{k} \int_o^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}.$$

---

*) Ueber die weitere Ausführung dieser Betrachtungen verweisen wir auf die Schrift von Briot und Bouquet: „Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques." Paris 1859. p. 57.

**) Vgl. hiezu die früher erwähnte Abhandlung von Puiseux und die eben genannte Schrift von Briot und Bouquet, p. 71 und 95.

Setzt man nun

$$z - a = \varrho e^{i\varphi},$$

so bleibt bei der kreisförmigen Integration um den Punct a der Radius ϱ constant, und φ wächst von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, wenn φ_0 den Anfangswerth von φ bezeichnet. Dann ist ferner

$$z - b = a - b + \varrho e^{i\varphi}$$

$$z - c = a - c + \varrho e^{i\varphi}$$

$$z - d = a - d + \varrho e^{i\varphi}$$

$$dz = i\varrho e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

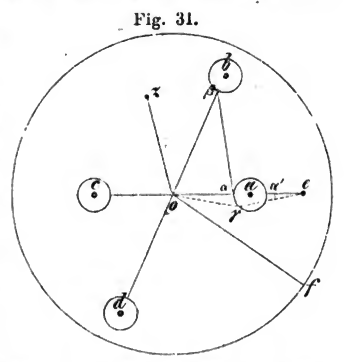
demnach geht das kreisförmige Integral über in

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{i\varrho^{\frac{1}{2}}}{k} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{(a-b+\varrho e^{i\varphi})(a-c+\varrho e^{i\varphi})(a-d+\varrho e^{i\varphi})}},$$

und wird, wie leicht ersichtlich, mit ϱ zugleich unendlich klein. Da nun nach dem Umlauf um die Peripherie des Kreises die Wurzelgrösse ihr Zeichen gewechselt hat, und daher die geradlinigen Integrale einander gleich werden, so reduciren sich auch hier die Integrale längs der Elementarconturen auf die doppelten Werthe der geradlinigen Integrale zwischen den Grenzen o und resp. $+ 1$, $+ \frac{1}{k}$, $- 1$, $- \frac{1}{k}$. Dabei entsteht aber eine kleine Schwierigkeit. Wenn nämlich der Modul k reell, positiv und kleiner als 1 ist, so führen die geraden Linien von o nach $\pm \frac{1}{k}$ durch die Puncte ± 1 hindurch. Bei der Integration zwischen den Grenzen o und $\pm \frac{1}{k}$ müssen aber die ausgezeichneten Puncte ± 1 vermieden werden. Dies kann nun zwar dadurch geschehen, dass man die gerade Linie in der Nähe dieser Puncte eine kleine Ausbiegung machen lässt, aber dabei sind zwei verschiedene Wege möglich. Nehmen wir zuerst an, die Variable z gehe vom Nullpuncte bis zu einem nahe an $+ 1$ (a, Fig. 31) liegenden Puncte α, beschreibe einen kleinen Halbkreis um a nach α' und gehe dann zu dem Puncte $\frac{1}{k}$ (e in der Fig.); untersucht man dann den

Werth, den das Integral auf diesem Wege erhält, so verschwindet das Integral längs des Halbkreises zugleich mit dem Radius des letzteren, weil sein Werth durch den Ausdruck (6) gegeben wird, wenn man darin statt der oberen Grenze $\varphi_0 + 2\pi$ nur $\varphi_0 + \pi$ setzt; und da die Wurzelgrösse auf der Peripherie des Halbkreises das Zeichen nicht wechselt, so reducirt sich beim Verschwinden des Kreisradius der Werth des Integrals auf die Summe der beiden geradlinigen Integrale $J(oa) + J(ae)$.

Fig. 31.



Man kann nun aber zweitens den ausgezeichneten Punct a in folgender Weise umgehen, wenn man die Variable von o nach einem nahe an a, aber ausserhalb der Abscissenaxe, liegenden Puncte γ gehen, dann einen ganzen Kreis um a beschreiben und darauf von γ nach e gehen lässt. Dann verschwindet zwar auch das kreisförmige Integral zugleich mit dem Radius, aber die Wurzelgrösse wechselt jetzt das Zeichen, und daher erhält man, wenn bei verschwindendem Radius der Punct γ mit a zusammenfällt, für den Werth des Integrals die Differenz $J(oa) - J(ae)$.*) Hiedurch bestätigt sich, dass das geradlinige Integral zwischen den Grenzen o und $\frac{1}{k}$ in der That nicht unzweideutig ist, wenn der Modul k als ein reeller, positiver, echter Bruch angenommen wird. Dasselbe gilt von dem Integrale zwischen den Grenzen o und $-\frac{1}{k}$.

Aus diesem Grunde, und weil es auch eine leichtere Anschauung gewährt, wenn keine zwei der Elementarconturen in dieselbe gerade Linie zusammenfallen, wollen wir vorläufig an-

*) Weiter unten wird man sehen, dass dieses damit übereinstimmt, dass $\sin am\, u$ sowohl für $u = K + iK'$, als auch für $u = K - iK'$ den Werth $\frac{1}{k}$ annimmt. (Vgl. die Formeln auf S. 29.)

nehmen, dass die Grösse $\frac{1}{k}$ einen beliebigen complexen Werth habe, und demnach die Werthe $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ durch die Puncte a, b, c, d in Fig. 31 darstellen. Bezeichnet man dann ferner die Werthe der Integrale längs der vier Elementarconturen um die Puncte a, b, c, d der Reihe nach mit A, B, C, D, so ist

$$(7) \quad \ldots\ldots \begin{cases} A = 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ B = 2\int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ C = 2\int\limits_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ D = 2\int\limits_0^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \end{cases}$$

und alle diese Integrale sind längs den zwischen den Grenzen liegenden geraden Linien zu nehmen.

Es wiederholen sich nun die bei dem vorigen Beispiele angestellten Betrachtungen. Nach jedem Umlaufe um eine Elementarcontur wechselt die Wurzelgrösse das Zeichen, daher erhält auch das Integral längs eines darauf folgenden Weges das entgegengesetzte Zeichen. Wird also eine Elementarcontur, z. B. die um a, zweimal hintereinander beschrieben, so ist der Werth des Integrals $A - A = 0$, und ebenso bei den anderen. Werden aber irgend zwei verschiedene Elementarconturen hintereinander beschrieben, z. B. um a und b, so ist der Werth des Integrals $A - B$. Alsdann hat die Wurzelgrösse zweimal das Zeichen gewechselt; geht also jetzt die Variable in gerader Linie von o nach einem beliebigen Puncte z, und ist u der Werth dieses geradlinigen Integrals, so wird der Werth des auf dem ganzen Wege genommenen Integrals $A - B + u$. Man kann die beiden Elementarconturen um a und b zusammen der Geraden oz so oft vorangehen lassen, als man will, daher ist $A - B$ eine der Perioden des Integrals. Da die Sache sich nun ebenso verhält, wenn man irgend zwei der Elementarconturen aufeinander

folgen lässt, so scheint es, dass man eben so viele Perioden erhalten wird, als die Anzahl der Combinationen der vier Elementarconturen zu je zwei beträgt, nämlich die folgenden sechs:

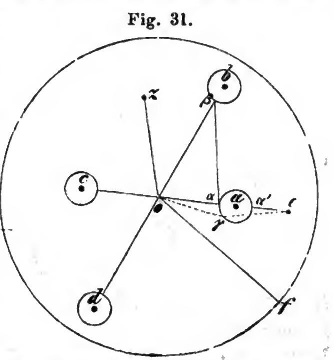
$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} A - B, & A - C, & A - D \\ B - C, & B - D, & C - D. \end{cases}$$

Allein zuerst erhellt leicht, dass die drei unteren sich auf die drei oberen reduciren, denn man hat

$$B - C = A - C - (A - B)$$
$$B - D = A - D - (A - B)$$
$$C - D = A - D - (A - C);$$

die drei unteren entstehen also durch Verbindung der drei oberen; z. B. der Werth $B - C$ würde auch entstehen, wenn man zuerst die Elementarconturen um a und c in positiver Richtung und dann die um a und b in negativer Richtung durchlaufen liesse. Man kann aber ferner zeigen, dass auch die dritte Periode $A - D$ aus einer Verbindung der beiden ersten $A - B$ und $A - C$ hervorgeht. Um dies einzusehen, untersuchen wir den Werth des Integrals längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Puncte a, b, c, d im Innern enthält. Zu dem Ende beschreiben wir aus dem Nullpuncte als Mittelpunct einen Kreis, der alle vier Puncte umschliesst, und lassen die Variable z zuerst in gerader Linie von o nach einem beliebigen Puncte f dieses Kreises gehen, den Kreis in positiver Richtung durchlaufen und von f wieder nach o zurückkehren; alsdann hat das Integral längs dieses Weges denselben Werth, wie längs der vier hintereinander durchlaufenen Elementarconturen, weil zwischen diesen beiden Wegen kein ausgezeichneter Punct liegt, und die beiden Wege den nämlichen Anfangspunct und den nämlichen Endpunct haben, folglich der zweite Satz des § 83 auf sie angewendet werden kann. Der Werth des Integrals längs dieses Weges ist also

Fig. 31.



$$A - B + C - D.$$

Wenn aber die Variable von dem Puncte f aus die Peripherie des Kreises durchläuft und wieder nach f zurückkehrt, so hat die Wurzelgrösse viermal das Zeichen gewechselt. Denn, denkt man sich von dem Puncte f aus Elementarconturen um die vier Puncte a, b, c, d beschrieben, so können dieselben durch allmälige Uebergänge in die Peripherie des Kreises umgeformt werden, ohne dass ein ausgezeichneter Punct überschritten wird (§ 81). Demnach hat die Wurzelgrösse bei der Rückkehr nach f denselben Werth wie beim Ausgange; da dann also die Wege of und fo mit demselben Zeichen der Wurzel durchlaufen werden, so heben die Integrale $J(of)$ und $J(fo)$ einander auf, und das längs der vier hintereinander durchlaufenen Elementarconturen genommene Integral $A - B + C - D$ hat denselben Werth, wie längs der Peripherie des Kreises allein. Dieses letztere Integral kann man aber ermitteln. Setzt man nämlich

$$z = \varrho e^{i\varphi},$$

so erhält man dafür

$$i\varrho \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{e^{i\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{(1 - \varrho^2 e^{2i\varphi})(1 - k^2 \varrho^2 e^{2i\varphi})}}$$

oder

$$\frac{i}{\varrho} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{e^{i\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho^2} - e^{2i\varphi}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} - k^2 e^{2i\varphi}\right)}}.$$

Nun ist der Werth dieses Integrals, da die Wurzelgrösse auf der geschlossenen Peripherie des Kreises monodrom ist, für jeden Werth des Radius ϱ derselbe, wenn nur der Kreis alle die vier ausgezeichneten Puncte umschliesst. Man kann also auch den Radius bis ins Unendliche zunehmen lassen, und dann hat das Integral den Grenzwerth Null. Demnach erhält man

$$A - B + C - D = 0.$$

Hieraus folgt

$$A - D = B - C,$$

oder

$$A - D = (A - C) - (A - B); \tag{9}$$

also ist auch die dritte Periode aus den beiden ersten zusammengesetzt, sodass die sechs unter (8) aufgestellten Perioden sich schliesslich auf die zwei folgenden

$$A - C \quad \text{und} \quad A - B$$

reduciren.

Bezeichnet nun wieder u das geradlinige Integral zwischen den Grenzen 0 und einem beliebigen Werthe z, so kann man zuerst der geraden Linie die obigen beiden Paare von Elementarconturen, jede in beliebiger Wiederholung, vorangehen lassen; das giebt, wenn n und m beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null bedeuten, für das Integral folgende Reihe von Werthen

$$n(A - C) + m(A - B) + u;$$

ferner kann man ausser diesen beiden Paaren von Elementarconturen noch eine einzige der vier Elementarconturen dem geradlinigen Integral vorhergehen lassen; dann erhält man vier neue Reihen, nämlich wegen des nach einmaligem Umlaufe um eine Elementarcontur erfolgten Zeichenwechsels:

$$\begin{aligned} &n(A - C) + m(A - B) + A - u \\ &n(A - C) + m(A - B) + B - u \\ &n(A - C) + m(A - B) + C - u \\ &n(A - C) + m(A - B) + D - u; \end{aligned}$$

aber diese lassen sich alle auf die erste reduciren, denn man hat

$$\begin{aligned} &n(A - C) + m(A - B) + B - u \\ &\quad = n(A - C) + (m - 1)(A - B) + A - u \\ &n(A - C) + m(A - B) + C - u \\ &\quad = (n - 1)(A - C) + m(A - B) + A - u, \end{aligned}$$

endlich weil

$$D = A - (A - D)$$

oder nach (9)

$$D = A - (A - C) + (A - B)$$

ist,

$$\begin{aligned} &n(A - C) + m(A - B) + D - u \\ &\quad = (n - 1)(A - C) + (m + 1)(A - B) + A - u. \end{aligned}$$

Demnach sind alle Werthe, welche das Integral zwischen den Grenzen 0 und z auf allen möglichen Integrationswegen erhalten kann, in folgenden zwei Formeln enthalten

$$n\,(A - C) + m\,(A - B) + u$$

und

$$n\,(A - C) + m\,(A - B) + A - u,$$

und es bleibt jetzt noch übrig, die Werthe von A, $A - C$ und $A - B$ wirklich anzugeben.

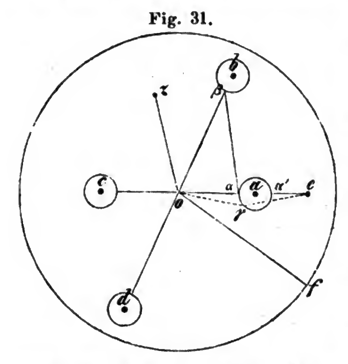
Die beiden ersten machen keine Schwierigkeit, denn es folgt aus (7) $C = -A$, demnach ist

$$A = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}}$$

$$A - C = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}}.$$

Der Werth von $A - B$ ist das Integral längs der beiden aufeinander folgenden Elementarconturen um a und b. Diesem Wege kann man aber folgenden anderen substituiren: man gehe von o nach einem nahe an a gelegenen Puncte α, beschreibe einen ganzen Kreis um a, gehe dann von α in gerader Linie nach einem nahe bei b liegenden Puncte β und beschreibe ebenfalls einen ganzen Kreis um b; darauf gehe man wieder von β nach α zurück und endlich von α, ohne den Punct a auf's Neue zu umwinden, nach dem Nullpuncte. Auf diesem Wege erhält das Integral denselben Werth, wie auf dem vorigen, weil zwischen beiden Wegen kein ausgezeichneter Punct liegt*), und beide den nämlichen Anfangspunct und den nämlichen Endpunct haben, also wieder der zweite Satz des § 83 angewendet werden

Fig. 31.



*) Würde nach der Rückkehr zum Puncte α der Punct a zum zweitenmale umwunden, so würde der Punct a sich zwischen beiden Wegen befinden, da bei der Umformung des einen Weges in den anderen dieser Punct überschritten werden müsste.

kann. Nun erleidet die Wurzelgrösse bei der Umkreisung des Punctes a einen Zeichenwechsel, bei der Umkreisung des Punctes b einen zweiten Zeichenwechsel, sie kommt also mit dem ursprünglichen Zeichen in α wieder an, der Weg $o\alpha$ wird daher in beiden Richtungen mit gleichem Zeichen der Wurzel durchlaufen, und die geradlinigen Integrale $J(o\alpha)$ und $J(\alpha o)$ heben sich auf. Nehmen nun die Radien der Kreise bis ins Unendliche ab, so verschwinden die kreisförmigen Integrale, und da der Weg $\alpha\beta$ mit negativem, der umgekehrte Weg $\beta\alpha$ dagegen mit positivem Zeichen der Wurzel durchlaufen wird, so reducirt sich der Werth von $A - B$ auf den negativen und doppelten Werth des geradlinigen Integrals von α bis β, d. h. wenn die Kreisradien verschwinden, der Punct α mit a, und β mit b zusammenfällt, zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{k}$; also ist

$$A - B = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Jetzt hat es kein Bedenken mehr, den Modul k als einen reellen und positiven echten Bruch anzunehmen, denn die geradlinigen Integrale sind jetzt nur noch zwischen den Grenzen 0, 1 und 1, $\frac{1}{k}$ zu nehmen, sodass bei ihnen niemals ein ausgezeichneter Punct überschritten wird. Macht man nun diese Annahme, so ist

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K,$$

und (nach § 24 (10) S. 93)

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -iK',$$

demnach wird

$$A = 2K,$$

und bei beiden Perioden sind

$$A - C = 4K, \quad A - B = 2iK';$$

also sind alle Werthe des auf beliebigen Wegen zwischen den Grenzen 0 und z genommenen elliptischen Integrals

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

in den beiden Formeln

$$4nK + 2miK' + u$$

und

$$4nK + 2miK' + 2K - u$$

enthalten.

Die umgekehrte Function sin *am* u ist daher doppelt periodisch, die Indices ihrer Perioden sind $4K$ und $2iK'$ (vgl. die Bemerkung auf S. 24), und man erhält

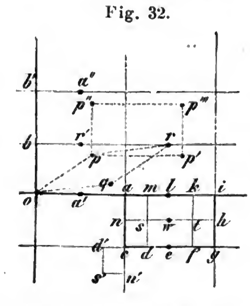
$$\sin am\,(4nK + 2miK' + u) = \sin am\, u$$

$$\sin am\,(2\,(2n+1)\,K + 2miK' - u) = \sin am\, u.$$

Wegen der zweiten Gleichung erhält die Function sin *am* u innerhalb jeder Periode denselben Werth für zwei verschiedene Werthe von u, deren Summe entweder gleich $2K$ oder ein ungerades Vielfaches von $2K$, oder eines von diesen beiden, vermehrt um ein Vielfaches von $2iK'$, ist.

Auch von der doppelten Periodicität kann man sich ein geometrisches Bild machen. Zieht man nämlich eine Reihe von geraden Linien in den Abständen $4K$ der Abscissenaxe parallel und eine zweite Reihe parallel der Ordinatenaxe in den Abständen $2K'$ (Fig. 32), so wird dadurch die Ebene in Rechtecke eingetheilt, sodass die Function sin *am* u in jedem Rechteck ihre sämmtlichen Werthe erhält und in je zweien entsprechenden Puncten verschiedener Rechtecke gleiche Werthe annimmt. Denn es sei $oa = 4K$, $ob = 2K'$, und in p habe die Variable den Werth u; macht man nun pp' und $p''p'''$ gleich und parallel oa, pp'' und $p'p'''$ gleich und parallel ob, so hat die Variable in

Fig. 32.



den Puncten p', p'', p''' resp. die Werthe $u + 4K$, $u + 2iK'$, $u + 4K + 2iK'$, und folglich hat die Function sin *am* u in ihnen denselben Werth wie in p. In jedem Rechteck hat sin *am* u den-

selben Werth in zwei Puncten, z. B. in den Puncten p und q, deren Summe der Punct $r = 6K + 2iK'$ ist.

Vermittelst dieses geometrischen Bildes kann man sich auch eine klarere Vorstellung von den im Abschnitt II und namentlich von den auf S. 28 und 29 gegebenen Formeln machen. Um dies wenigstens an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir untersuchen, welche Wegstrecken die Variable u nach und nach durchlaufen muss, wenn die Function $\sin am\, u$ alle reellen Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ annimmt*). Nehmen wir zu dem Ende an, das Rechteck $cgia$ sei dasjenige, in dessen vier Ecken c, g, a, i die Variable u resp. die Werthe $o, 4K, 2iK', 4K + 2iK'$ habe; theilt man dann die Seiten cg und ai in je vier Theile und die Seiten ca und gi in je zwei Theile und verbindet die Theilpuncte, so entsprechen diesen folgende Werthe von u:

c	o	n ...	iK'	a ...	$2iK'$
d	K	s ...	$K + iK'$	m ...	$K + 2iK'$
e	$2K$	w ...	$2K + iK'$	l ...	$2K + 2iK'$
f	$3K$	t ...	$3K + iK'$	k ...	$3K + 2iK'$
g	$4K$	h ...	$4K + iK'$	i ...	$4K + 2iK'$.

Man kann nun aus den oben erwähnten Formeln folgende Tafel zusammenstellen, in welcher mit v immer ein reelles Argument bezeichnet worden ist:

$$\sin am\, iK' = \infty$$
$$\sin am\,(K + iK') = \frac{1}{k}$$
$$\sin am\, K = 1$$
$$\sin am\, 2K = 0$$
$$\sin am\, 3K = -1$$
$$\sin am\,(3K + iK') = -\frac{1}{k}$$
$$\sin am\,(4K + iK') = \infty$$

$$\sin am\,(v + iK') = \frac{1}{k \sin am\, v}$$
$$\sin am\,(K + iv) = \frac{1}{\Delta\, am\,(v, k')}$$
$$\sin am\,(v + K) = \frac{\cos am\, v}{\Delta\, am\, v}$$
$$\sin am\,(v + 2K) = -\sin am\, v$$
$$\sin am\,(3K + iv) = -\frac{1}{\Delta\, am\,(v, k')}$$
$$\sin am\,(3K + iK' + v) = -\frac{\Delta\, am\, v}{k \cos am\, v}$$

Demnach entsprechen den Aenderungen von $\sin am\, u$ folgende Wege für u:

---

*) Vgl. § 67.

sin *am u* nimmt ab				*u* geht			
von	∞	bis	$\frac{1}{k}$	von	n	nach	s
„	$\frac{1}{k}$	„	1	„	s	„	d
„	1	„	0	„	d	„	e
„	0	„	-1	„	e	„	f
„	-1	„	$-\frac{1}{k}$	„	f	„	t
„	$-\frac{1}{k}$	„	∞	„	t	„	h;

also ist die gebrochene Linie *nsdefth* der Weg, den die Variable u durchläuft, während $\sin am\, u$ alle reellen Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ annimmt.

Nun giebt es aber noch einen zweiten Weg; dieser geht aus folgenden Formeln hervor:

$$\sin am\, iK' = \infty$$
$$\sin am\, (K + iK') = \frac{1}{k}$$
$$\sin am\, (K + 2iK') = 1$$
$$\sin am\, (2K + 2iK') = 0$$
$$\sin am\, (3K + 2iK') = -1$$
$$\sin am\, (3K + iK') = -\frac{1}{k}$$
$$\sin am\, (4K + iK') = \infty$$

$$\sin am\, (v + iK') = \frac{1}{k \sin am\, v}$$
$$\sin am\, (K + iK' + iv) = \frac{\Delta\, am\, (v, k')}{k}$$
$$\sin am\, (K + v + 2iK') = \frac{\cos am\, v}{\Delta\, am\, v}$$
$$\sin am\, (2K + v + 2iK') = -\sin am\, v$$
$$\sin am\, (3K + iK' + iv) = -\frac{\Delta\, am\, (v, k')}{k}$$
$$\sin am\, (3K + v + iK') = -\frac{\Delta\, am\, v}{k \cos am\, v}$$

demnach hat man folgendes:

sin *am u* nimmt ab				*u* geht			
von	∞	bis	$\frac{1}{k}$	von	n	nach	s
„	$\frac{1}{k}$	„	1	„	s	„	m
„	1	„	0	„	m	„	l
„	0	„	-1	„	l	„	k
„	-1	„	$-\frac{1}{k}$	„	k	„	t
„	$-\frac{1}{k}$	„	∞	„	t	„	h,

und man erhält für den Weg von u zweitens die gebrochene Li-

nie *nsmlkth*. Endlich kann man auf beiden Wegen statt der Strecken *ns* und *th* auch resp. *ws* und *tw* substituiren; denn in *w* ist $u = 2K + iK'$, und man hat einerseits

$$\left.\begin{array}{l}\sin am\,(2K + iK') = \infty\\ \sin am\,(K + iK') = \dfrac{1}{k}\end{array}\right\}\ \sin am\,(K + v + iK') = \frac{\varDelta\, am\, v}{k \cos am\, v},$$

andererseits

$$\left.\begin{array}{l}\sin am\,(2K + iK') = \infty\\ \sin am\,(3K + iK') = -\dfrac{1}{k}\end{array}\right\}\ \sin am\,(2K + v + iK') = -\frac{1}{k \sin am\, v},$$

also durchläuft $\sin am\, u$ auf den Wegen *ws* und *wt* resp. die reellen Werthe von ∞ bis $\frac{1}{k}$ und von ∞ bis $-\frac{1}{k}$, sodass man auch noch die beiden gebrochenen Linien *wsdeftw* und *wsmlktw* erhält.

Fig. 32.

Geht man aus dem Rechteck *cgia* heraus, so kann man für die reelle Werthänderung von $\sin am\, u$ auch noch den Weg *nsdcd's'n'* angeben, weil *u* und $\sin am\, u$ gleichzeitig das Zeichen ändern.

Die Function $\sin am\, u$ erhält, wie wir wissen, im Allgemeinen jeden ihrer Werthe in zwei verschiedenen Puncten des nämlichen Rechtecks; schliesst man die Puncte der Geraden *ai* aus, weil in dieser die Werthe von *u* gerade um den Index $2iK'$ der imaginären Periode grösser sind, als in den entsprechenden Puncten der Geraden *cg*, so sind die Strecken, auf welchen die Function $\sin am\, u$ gleiche reelle Werthe erhält, folgende:

$\sin am\, u$	geht	von	∞	bis	$\frac{1}{k}$	auf	*ns*	und	*ws*
„	„	„	$\frac{1}{k}$	„	1	„	*sd*	„	*sm*
„	„	„	1	„	0	„	*de*	„	*dc*
„	„	„	0	„	-1	„	*ef*	„	*gf*
„	„	„	-1	„	$-\frac{1}{k}$	„	*ft*	„	*kt*
„	„	„	$-\frac{1}{k}$	„	∞	„	*th*	„	*tw*.

Man sieht hieraus zugleich, dass in den vier Puncten d ($u = K$, $\sin am\, u = 1$), f ($u = 3K$, $\sin am\, u = -1$), s ($u = K + iK'$, $\sin am\, u = \frac{1}{k}$) und t ($u = 3K + iK'$, $\sin am\, u = -\frac{1}{k}$) je zwei entsprechende Puncte zusammenfallen, woraus man noch den Schluss ziehen kann, dass jede zwei entsprechende Puncte so liegen müssen, dass ihre Verbindungslinie durch einen der zwei Puncte, s oder t, hindurchgeht und von ihm halbirt wird.

Fig. 32.

Es hat keine Schwierigkeit, diese Betrachtungen auch auf $\cos am\, u$ und $\varDelta\, am\, u$ auszudehnen, was hier jedoch nicht ausgeführt werden soll; zu bemerken ist nur, was schon § 8. S. 24 angegeben wurde, dass bei $\cos am\, u$ die einfachsten Perioden $4K$ und $2K + 2iK'$ und bei $\varDelta\, am\, u$ $2K$ und $4iK'$ sind. Daher sind alle Werthe von $\cos am\, u$ in dem Parallelogramm $oarr'$ (Fig. 32) und alle Werthe von $\varDelta\, am\, u$ in dem Rechteck $oa'a''b'$ enthalten. Ausserdem ist dabei zu berücksichtigen, dass abgesehen von den Perioden auch

$$\cos am\,(4K - u) = \cos am\, u, \quad \varDelta\, am\,(2K - u) = \varDelta\, am\, u$$

ist.

Vorstehendes möge zu dem doppelten Zwecke, der hier vorlag, genügen. Es kam zuerst darauf an, die Schwierigkeiten zu entfernen, welche die Definition der elliptischen Function als Umkehrung des elliptischen Integrals unzweifelhaft darbietet, sobald man nicht complexe Integrale mit in Betracht zieht*). Es ist gezeigt worden, dass Integrale algebraischer Functionen, wenn man die Variable nicht bloss alle reellen, sondern auch alle möglichen stetig aufeinander folgenden complexen Werthe zwischen zwei bestimmten Grenzen durchlaufen lässt, unendlich viele verschiedene Werthe annehmen und durch ihre Umkehrung periodische Functionen erzeugen können; ferner, dass man mit Hülfe der geo-

---

*) Vgl. die erste Note auf S. 4.

metrischen Darstellung der imaginären Grössen eine deutliche Vorstellung von der doppelten Periodicität und von dem Uebergange vom Reellen zum Imaginären gewinnen kann. Die zweite Absicht, die den in dem letzten Abschnitte angestellten Betrachtungen zum Grunde lag, ging dahin, auf die grosse Bedeutung hinzuweisen, welche die Einführung complexer Variablen auf die Theorie der Functionen überhaupt, besonders der elliptischen und Abel'schen Functionen hat. Es mag nun für das weitere Studium zunächst der elliptischen Functionen von diesem Gesichtspuncte aus auf die schon erwähnte Schrift von Briot und Bouquet verwiesen werden.

Berichtigungen.

S. 24. Z. 5. v. u. statt $2iK$ lies $2iK'$.

S. 46. Z. 11 „ $\pm\infty$ und $\mp\infty$ lies $\mp\infty$ und $\pm\infty$.

S. 117. Z. 3 und 4 v. u. statt $\sin\sigma, \sin\theta$ „ $\sin\sigma \sin\theta$.

S. 144. Ueberschrift „ Abschn. X „ Abschn. XI.

S. 191. Z. 2 „ u „ v.

S. 216. Z. 12. Hinter „Aus diesen“ lies „und ähnlichen“.

S. 221. Z. 2. statt $(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}q+^{4h})$ lies $(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{2K}+q^{4h})$.

S. 245. Z. 8. In $1+q^{2h-1}$ ist das Minuszeichen nicht ausgedruckt.

S. 328. Z. 14 v. o. statt 2^{2b} lies e^{2b}.

S. 366. Z. 5 v. u. Die Gleichung $A-B+C-D=0$ folgt eigentlich schon aus den Formeln (7) S. 364; die im Text mitgetheilte Ableitung gilt aber zugleich für den Fall, dass an die Stelle der paarweise gleichen und entgegengesetzten Grössen $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ irgend vier beliebige Grössen treten.



